Matematica divertente

Elogio della Mente 2017

Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Università Cattolica, Brescia

20-21 ottobre 2017

Martin Gardner

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Martin Gardner (Tulsa, 21 ottobre 1914 – Norman, 22 maggio 2010) è stato un matematico, illusionista e divulgatore scientifico statunitense, con interessi variegati che spaziavano dalla filosofia allo scetticismo scientifico. Fu per molti anni il curatore della rubrica "Mathematical Games" sulla rivista *Scientific American* (la cui versione italiana era "Giochi Matematici", pubblicata su *Le Scienze*).

Martin Gardner

È stato autore di oltre 65 libri e di innumerevoli articoli nel campo della matematica, scienza, filosofia, letteratura.

Elogio della Mente (Celebration of Mind)

Per celebrare il "metodo Gardner"

- Oggi si tiene in molte parti del mondo l'evento "Celebration of Mind" che vuole ricordare Martin Gardner e soprattutto celebrare lo spirito "giocoso" con cui egli si approcciava alla Matematica.
- Lo scopo dell'iniziativa non è tanto quello di celebrare la figura di Martin Gardner, cosa che avrebbe contrariato lo stesso Gardner, ma rilanciare il suo metodo, proponendo delle attività che aiutino la diffusione della Matematica da un punto di vista diverso da quello accademico o scolastico.

Celebration of Mind 2017

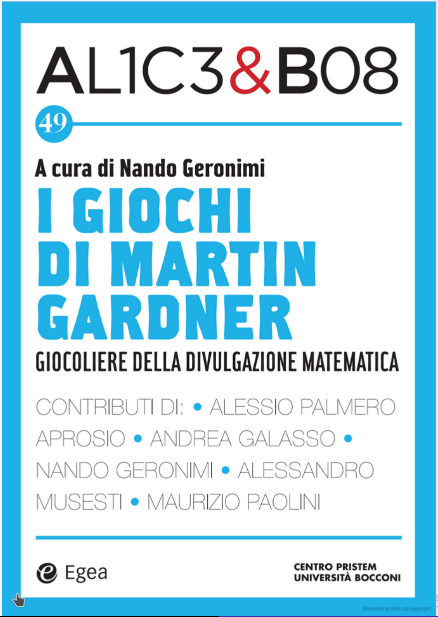
Ci vediamo oggi pomeriggio...

Vi ricordo che la conferenza di stamattina è solo il preludio... riprenderemo oggi pomeriggio alle 15 presso il Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia" in via dei Musei con

- Tanti giochini, rompicapi, materiale curioso interattivo
- Una conferenza sulle tassellazioni pentagonali
- Attività specifiche sulle tassellazioni (Istituto Celeri di Lovere)
- bolle di sapone, poliedri, ...

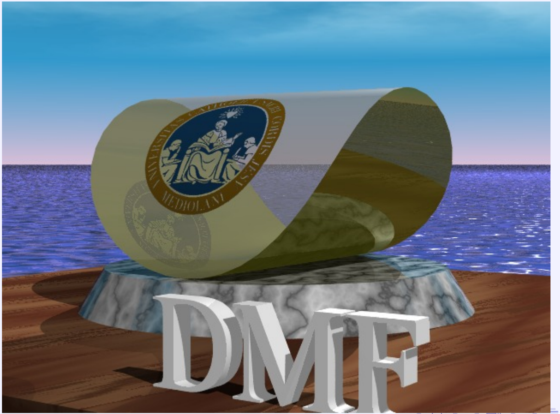
Domani pomeriggio ci trovate alla "Città del Sole" (corso Mameli 40) a partire dalle 15.00

Alice & Bob


AL1C3&B08
49
A cura di Nando Geronimi
I GIOCHI
DI MARTIN
GARDNER
GIOCOLIERE DELLA DIVULGAZIONE MATEMATICA
CONTRIBUTI DI: • ALESSIO PALMERO APROSIO • ANDREA GALASSO • NANDO GERONIMI • ALESSANDRO MUSESTI • MAURIZIO PAOLINI
Egea
CENTRO PRISTEM
UNIVERSITÀ BOCCONI

Dipartimento di Matematica e Fisica

L'attività di oggi è possibile grazie al Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia", dell'Università Cattolica di Brescia e alla **Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali**.
Dopo la maturità potete venire da noi a studiare matematica o fisica, una laurea che apre la mente (e con sbocchi assicurati).



Giochi esponenziali

Matematica divertente 2017

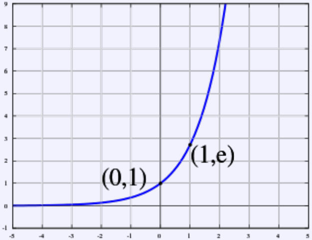
Maurizio Paolini (paolini@dmf.unicatt.it)

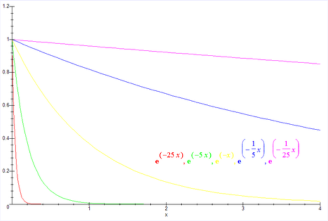
Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Università Cattolica, Brescia

IIS Castelli, 20 ottobre 2017

Esponenziale a chi?

"Esponenziale" è una parola molto abusata nel linguaggio comune, ma quasi sempre è utilizzata a sproposito.
Si tratta di un numero? No, si parla di un "andamento": crescita/decadimento esponenziale.
È qualcosa che all'aumentare di una quantità, ad esempio il tempo, risulta "moltiplicata" per una quantità fissa:





$$y = a^x, \qquad y = \exp(x), \qquad y = 2^x$$

Comunque è utile per costruire numeri "grandi"

Prendo un foglio di giornale

- lo strappo in due e sovrappongo le due parti.

Prendo un foglio di giornale

- lo strappo in due e sovrappongo le due parti.
- strappo in due i due fogli sovrapposti e sovrapponto i 4 fogli che ottengo
- ...

Prendo un foglio di giornale

- lo strappo in due e sovrappongo le due parti.
- strappo in due i due fogli sovrapposti e sovrapponto i 4 fogli che ottengo
- ...
- ripeto questa operazione 50 volte

Quanto è alta la pila di fogli che ottengo alla fine?

Prendo un foglio di giornale

- lo strappo in due e sovrappongo le due parti.
- strappo in due i due fogli sovrapposti e sovrapponto i 4 fogli che ottengo
- ...
- ripeto questa operazione 50 volte

Quanto è alta la pila di fogli che ottengo alla fine?
Ipotizzando uno spessore di $0,05 mm$ per il foglio di giornale, otterrei una altezza di circa

Prendo un foglio di giornale

- lo strappo in due e sovrappongo le due parti.
- strappo in due i due fogli sovrapposti e sovrapponto i 4 fogli che ottengo
- ...
- ripeto questa operazione 50 volte

Quanto è alta la pila di fogli che ottengo alla fine?
Ipotizzando uno spessore di $0,05mm$ per il foglio di giornale, otterrei una altezza di circa

56 milioni di chilometri!

Il Sole dista 150 milioni di chilometri...

L'invenzione della scacchiera

C'era una volta un ricchissimo Principe indiano. Le sue ricchezze erano tali che nulla gli mancava ed ogni suo desiderio poteva essere esaudito. Mancandogli però in tal modo proprio ciò che l'uomo comune spesso ha, ovvero la bramosia verso un desiderio inesaudibile, il Principe trascorreva le giornate nell'ozio e nella noia. Un giorno, stanco di tanta inerzia, annunciò a tutti che avrebbe donato qualunque cosa richiesta a colui che fosse riuscito a farlo divertire nuovamente.

A corte si presentò uno stuolo di personaggi d'ogni genere, eruditi saggi e stravaganti fachiri, improbabili maghi e spericolati saltimbanchi, sfarzosi nobili e zotici plebei, ma nessuno riuscì a rallegrare l'annoiato Principe. Finché si fece avanti un mercante, famoso per le sue invenzioni. Aprì una scatola, estrasse una tavola con disegnate alternatamente 64 caselle bianche e nere, vi appoggiò sopra 32 figure di legno variamente intagliate, e si rivolse al nobile reggente: "Vi porgo i miei omaggi, o potentissimo Signore, nonchè questo gioco di mia modesta invenzione. L'ho chiamato il gioco degli scacchi".

Scacchiera 2

Il Principe guardò perplesso il mercante e gli chiese spiegazioni sulle regole. Il mercante gliele mostrò, sconfiggendolo in una partita dimostrativa. Punto sull'orgoglio il Principe chiese la rivincita, perdendo nuovamente. Fu alla quarta sconfitta consecutiva che capì il genio del mercante, accorgendosi per giunta che non provava più noia ma un gran divertimento! Memore della sua promessa, chiese all'inventore di tale sublime gioco quale ricompensa desiderasse.

Il mercante, con aria dimessa, chiese un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e via a raddoppiare fino all'ultima casella. Stupito da tanta modestia, il Principe diede ordine affinché la richiesta del mercante venisse subito esaudita. Gli scribi di corte si apprestarono a fare i conti, ma dopo qualche calcolo la meraviglia si stampò sui loro volti. Il risultato finale, infatti, era uguale alla quantità di grano ottenibile coltivando una superficie più grande della stessa Terra! Non potendo materialmente esaudire la richiesta dell'esoso mercante e non potendo neppure sottrarsi alla parola data, il Principe diede ordine di giustiziare immediatamente l'inventore degli scacchi.

(tratto da `http://scacchi.qnet.it/manuale/leggenda.htm`)

Scacchiera 3

$$\sum 2^n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots\ldots + 2^n$$

dove n è un intero da 0 a 63.

Si può dimostrare che la somma totale dei chicchi di grano sulla scacchiera è data dalla potenza $2^{64} - 1$ oppure numericamente[5]:

18.446.744.073.709.551.615

Per comodità e per maggiore facilità per la comprensione di quanto esposto, consideriamo la seguente tabella in cui sono rappresentati soltanto i numeri che si ottengono nell'ultima colonna ad ogni fine traversa.

Tabella 1 – I numeri di Sissa

Traversa	Numero finale in ogni riga	Ordine di grandezza		Centinaia, decine di migliaia, ...
1^	128	Centinaia	10^2	100
2^	32.768	Decine di migliaia	10×10^3	10.000
3^	8.388.608	Milioni	10^6	1.000.000
4^	2.147.483.648	Miliardi	10^9	1.000.000.000
5^	549.755.813.888	Centinaia di Miliardi	$10^2 \times 10^9$	100.000.000.000
6^	140.737.488.355.328	Centinaia di Bilioni[1]	$10^2 \times 10^{12}$	100.000.000.000.000
7^	36.028.797.018.963.968	Decine di Biliardi[2]	10×10^{15}	10.000.000.000.000.000
8^	9.223.372.036.854.775.808	Trilioni[3]	10^{18}	1.000.000.000.000.000.000

nota 1: Centinaia di Migliaia di Miliardi; nota 2: Decine di Milioni di Miliardi; nota 3: Miliardi di Miliardi

La tabella contiene nella seconda colonna solo i numeri finali su ogni riga. La somma di tutti questi numeri e di tutti gli altri, che si calcolano con il procedimento sopra riportato, è il numero di Sissa, quel numero così grande e impronunciabile.

Una curiosità abbastanza evidente, che non sfugge a chi si occupa di problemi di matematica dimensionale, è che passando di riga in riga raddoppia l'ordine di grandezza della potenza, cioè da una riga alla successiva si raggiungono numeri con due-tre cifre in più, oppure

5 V. Appendice B – Tutti i numeri di Sissa e Appendice C – La serie geometrica di Sissa.

detto altrimenti, dalle centinaia alle decine di migliaia, ai milioni, e così via... Il numero totale di chicchi di grano si legge:

18	Trilioni
446	Biliardi
744	Bilioni
73	Miliardi
709	Milioni
551	Mila
615	chicchi di grano

La leggenda di Sissa permette così di introdurre numeri grandi, soffermandosi in particolare sugli ordini di grandezza strettamente legati al numero di cifre costituenti le migliaia, i milioni, i miliardi, le migliaia di miliardi (bilioni), e così via. A seconda del livello di studio degli allievi si possono rappresentare tali cifre con potenze di base 10.

Il metodo è quindi utile per introdurre una scala di numeri, anche grandi, per ordini di grandezze:

mille	10^3 = 1.000
milione	10^6 = 1.000 migliaia
miliardo	10^9 = 1.000 milioni
bilione	10^{12} = 1.000 miliardi
biliardo	10^{15} = 1.000 bilioni
trilione	10^{18} = 1.000 biliardi
triliardo	10^{21} = 1.000 trilioni
quadrilione	10^{24} = 1.000 triliardi
quadriliardo	10^{27} = 1.000 quadrilioni
- - - - - - - - -	
- - - - - - - - -	
decilione	10^{60}
- - - - - - - - -	
- - - - - - - - -	
centilione	10^{600}

Scacchiera 4

Alcuni confronti.

Il numero delle particelle elementari nell'Universo visibile è stimato tra 10^{72} e 10^{87}, senza considerare la materia oscura; in questo caso il numero sarebbe di gran lunga superiore (comunque più del 200%).

Il numero di Stelle nell'Universo $3 \cdot 10^{23}$.

Il numero di atomi in un corpo umano, del peso 70 Kg, $15 \cdot 10^{18}$.

Il numero delle possibili partite di scacchi circa 10^{120} (numero di Shannon) ...

Ci proponiamo ora di capire esattamente quanto grande fosse quell'ineffabile numero di chicchi.

Calcoliamo la massa di tutto il grano richiesto. Un chicco di grano ha una massa in media di 35-50 mg a seconda della qualità. Noi consideriamo un valore attendibile di circa 38 mg, valore del resto utilizzato nella prova di Matematica nell'Esame di Stato di Liceo Scientifico PNI (Piano Nazionale Informatica) nel 2006, in cui è stato trattato il quesito riguardante la storia dell'inventore degli scacchi Sissa.

Ora, se un chicco ha massa pari a 38mg, per calcolare la massa di tutti i chicchi richiesti basta moltiplicare il numero trovato per 38mg e poi trasformarlo in tonnellate, sapendo che 1t = 1000 kg, si ottiene

$$18.446.744.073.709.551.615 \times 38\text{mg} = 7{,}00976 \cdot 10^{11} \text{ tonnellate}$$

Ovvero la massa di tutto il grano chiesto ammonta a circa 700 miliardi di tonnellate[6].

Per avere un'idea di quanto fosse grande questo numero vediamo un confronto realistico con la quantità attuale di grano prodotta in un anno da tutto il mondo.

6 700 miliardi = 7x100x1.000.000.000 oppure in forma di potenza $7 \times 10^2 \times 10^9$, cioè 7×10^{11}, per la proprietà delle potenze per cui si sommano gli esponenti delle moltiplicazioni tra potenze con stessa base. Il numero trovato è dell'ordine di grandezza del peso dei chicchi di grano chiesti da Sissa.

Ci chiediamo perciò quanto tempo fosse necessario per produrre tutto il grano chiesto. Per calcolarlo utilizziamo i dati sulla produzione annuale di grano nel mondo. Secondo i dati AMIS (Agricultural Market Information System) riferiti al 2013-2014, questa produzione ammonta a

$$\sim 700 \text{ Milioni di tonnellate/anno}$$

Possiamo a questo punto ricavare il tempo in anni necessario per produrre tutti i chicchi di grano richiesti al tasso di produzione sopra indicato.

Ebbene una semplice divisione porta al seguente risultato[7]:

1001,4 anni!

Un tempo decisamente lungo per il povero Re!

Sicuramente anche molto più lungo, se si considera che la produzione mondiale di grano all'epoca era un tantino più modesta.

Gli scacchi e la storiella di Sissa sono presenti anche nella Divina Commedia, Dante Alighieri (Paradiso, canto XXVIII°, versi 91-93).

> "L'incendio suo seguiva ogne scintilla;
> ed eran tante, che 'l numero loro
> più che 'l doppiar de li scacchi s'immilla."
>
> (Dante - Par. XXVIII, 91-93)

Il messaggio è chiaro. Dante (1265-1321) vuole superare la grandezza del numero che riguarda la leggenda di Sissa (più che'l doppiar de li scacchi) per indicare la grandezza di Dio circondato dai suoi numerosissimi angeli (scintille), chiamando in causa una progressione geometrica non di base 2, bensì di base 1000 (s'immilla) notevolmente più numerosa.

7 È sufficiente fare la seguente divisione (700 miliardi t):(700 milioni t/a) = 1000 anni. Nel calcolo del testo si è tenuto conto della massa totale del grano non approssimata.

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

Ricordando che $\log_{10} 2 \approx 0,30103$ si ha:

$$\log_{10} 2^{64} \approx 64 \times 0,30103 \approx 19,266$$

e ho quindi un numero di 20 cifre!

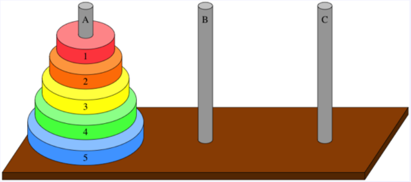
Giochi esponenziali

Sono giochi (rompicapi) che per essere risolti richiedono un tempo che cresce esponenzialmente rispetto ad un certo numero:

- numero di dischi della Torre di Hanoi
- numero di strati di un cubo di Rubik
- numero di anelli del rompicapo cinese
- numero di caselle di una scacchiera

Esempi?

La torre di Hanoi



Il gioco è composto da tre paletti e un certo numero di dischi di grandezza decrescente, che possono essere infilati in uno qualsiasi dei paletti.
Il gioco inizia con tutti i dischi incolonnati su un paletto in ordine decrescente, in modo da formare un cono. Lo scopo del gioco è portare tutti i dischi su un paletto diverso rispettando le regole:

- Si può spostare solo un disco alla volta (il più in alto in uno dei paletti);
- Non si può mettere un disco grande sopra uno più piccolo.

La leggenda parla di una torre di 64 dischi in un tempio Indù.

C'è soluzione?

In effetti non è difficile convincersi (dimostrare) che il problema si può risolvere. Chiamiamo n il numero di dischi:

C'è soluzione?

In effetti non è difficile convincersi (dimostrare) che il problema si può risolvere. Chiamiamo n il numero di dischi:
Se ci fosse un solo disco ($n = 1$) la soluzione sarebbe banale;

C'è soluzione?

In effetti non è difficile convincersi (dimostrare) che il problema si può risolvere. Chiamiamo n il numero di dischi:
Se ci fosse un solo disco ($n = 1$) la soluzione sarebbe banale;
Se immaginiamo di saper risolvere la Torre di Hanoi con $n - 1$ dischi, allora lo sappiamo fare anche per n dischi:

C'è soluzione?

In effetti non è difficile convincersi (dimostrare) che il problema si può risolvere. Chiamiamo n il numero di dischi:
Se ci fosse un solo disco ($n = 1$) la soluzione sarebbe banale;
Se immaginiamo di saper risolvere la Torre di Hanoi con $n - 1$ dischi, allora lo sappiamo fare anche per n dischi:

1. Spostiamo tutti i dischi sopra al disco più grande dal paletto A al paletto C (cosa che abbiamo immaginato di saper fare);
2. Ora possiamo spostare il disco più grande da A a B;
3. Infine spostiamo nuovamente tutta la torre che si trova in C ($n - 1$ dischi) da C a B e il gioco è fatto.

È una perfetta dimostrazione "per induzione"!

Quante mosse ci vogliono?

Se $f(n)$ indica il numero di mosse necessarie per portare a termine il compito, quello che si vede è:

- $f(1) = 1$
- $f(n) = f(n-1) + 1 + f(n-1) = 2f(n-1) + 1$

e una veloce dimostrazione per induzione mostra allora che

$$f(n) = 2^n - 1$$

Quante mosse ci vogliono?

Se $f(n)$ indica il numero di mosse necessarie per portare a termine il compito, quello che si vede è:

- $f(1) = 1$
- $f(n) = f(n-1) + 1 + f(n-1) = 2f(n-1) + 1$

e una veloce dimostrazione per induzione mostra allora che

$$f(n) = 2^n - 1$$

Si può fare meglio?

No, infatti non posso spostare il blocco più grande se prima non sposto **tutta** la torre "$n-1$" da A a C e poi nuovamente da C a B

Isomorfismo: un brutto termine per indicare due cose apparentemente diverse ma che (capito il trucco) si scopre essere "la stessa cosa".

Isomorfismo

Isomorfismo: un brutto termine per indicare due cose apparentemente diverse ma che (capito il trucco) si scopre essere "la stessa cosa".

Per spostare la torre del tempio Indù (64 dischi) serve un numero di mosse uguale al numero di chicchi di riso della ricompensa per l'invenzione della scacchiera! Poveri monaci...

Operativamente?

- Nella prima mossa devo per forza spostare il disco D_1 (il più piccolo)
- Non conviene spostare lo stesso disco due volte di seguito (spreco una mossa)

Operativamente?

- Nella prima mossa devo per forza spostare il disco D_1 (il più piccolo)
- Non conviene spostare lo stesso disco due volte di seguito (spreco una mossa)

Segue che la sequenza di mosse prevede di alternare

- spostamento di D_1
- spostamento di un altro disco (e in questo caso ho una scelta obbligata)

L'unica scelta che mi resta è in che direzione spostare il disco D_1.

Operativamente?

- Nella prima mossa devo per forza spostare il disco D_1 (il più piccolo)
- Non conviene spostare lo stesso disco due volte di seguito (spreco una mossa)

Segue che la sequenza di mosse prevede di alternare

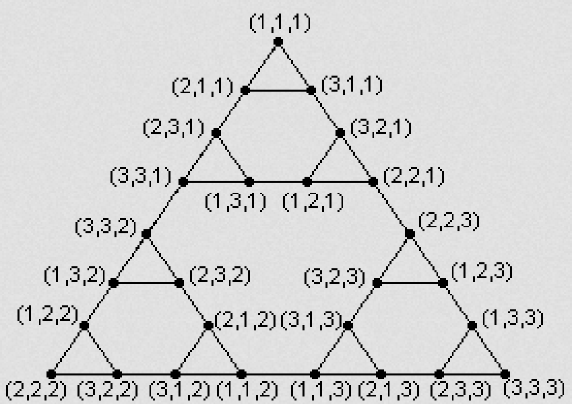
- spostamento di D_1
- spostamento di un altro disco (e in questo caso ho una scelta obbligata)

L'unica scelta che mi resta è in che direzione spostare il disco D_1.
Si scopre che la strategia ottimale prevede di spostare D_1 sempre nella stessa direzione, ad esempio: $A \to B \to C \to A \to B \dots$

Si scopre anche che il disco D_k si muove nella direzione opposta a quella di D_{k-1}.

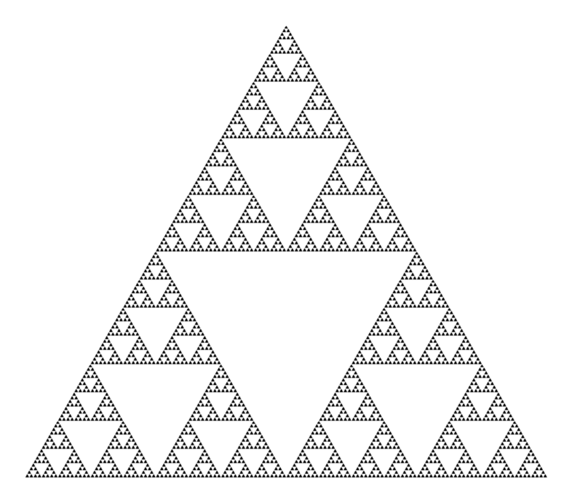
Domanda

Nel tempio Indù, se si vuole spostare l'intera torre da A a B (verso destra), quale dovrà essere la prima mossa?



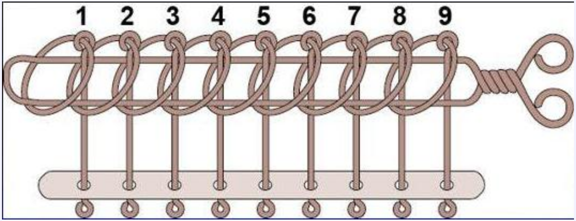
Ad esempio $(3, 1, 2) = (C, A, B)$ indica che il disco D_1 sta nel piolo C, il disco D_2 nel piolo A, il disco D_3 in B.

Isomorfismo: triangolo di Sierpinski



Isomorfo alla torre con 8 dischi.

Anelli cinesi

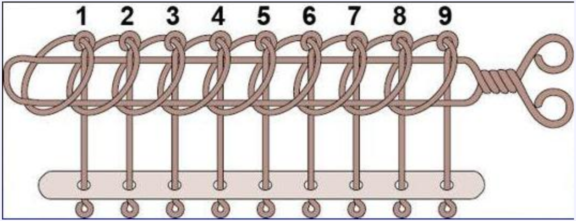


Isomorfo alla torre di Hanoi con 9 dischi. La soluzione prevede di alternare le due mosse A e B

A Allaccio o slaccio l'anello 1

B Allaccio o slaccio l'anello nella posizione successiva a quella del primo anello allacciato (ad esempio, se gli anelli 1 e 2 sono slacciati e il 3 è allacciato, allora posso allacciare o slacciare l'anello 4

Anelli cinesi



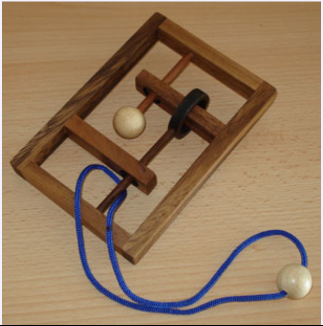
Isomorfo alla torre di Hanoi con 9 dischi. La soluzione prevede di alternare le due mosse A e B

A Allaccio o slaccio l'anello 1

B Allaccio o slaccio l'anello nella posizione successiva a quella del primo anello allacciato (ad esempio, se gli anelli 1 e 2 sono slacciati e il 3 è allacciato, allora posso allacciare o slacciare l'anello 4

Servono circa $\frac{2}{3}2^9$ mosse (circa 340) per slacciare tutti gli anelli

Altri giochi isomorfi



Torre di Hanoi con infiniti dischi

Inizialmente tutti i dischi sono infilati nel piolo A.

Domanda

Qual è la configurazione della torre dopo n mosse?

Quante volte ho mosso il disco k dopo n mosse di hanoi?
La sequenza di mosse inizia così:

$$D_1 D_2 D_1 D_3 D_1 D_2 \ldots$$

Il disco D_k viene spostato la prima volta alla mossa 2^{k-1}-esima e poi nuovamente ogni 2^k mosse. quindi viene spostato

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

volte

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A
Il disco D_5 viene spostato (verso destra) 63 volte, finirà in A

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A
Il disco D_5 viene spostato (verso destra) 63 volte, finirà in A
Il disco D_6 viene spostato (verso sinistra) 32 volte, finirà in B

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A
Il disco D_5 viene spostato (verso destra) 63 volte, finirà in A
Il disco D_6 viene spostato (verso sinistra) 32 volte, finirà in B
Il disco D_7 viene spostato (verso destra) 16 volte, finirà in B

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A
Il disco D_5 viene spostato (verso destra) 63 volte, finirà in A
Il disco D_6 viene spostato (verso sinistra) 32 volte, finirà in B
Il disco D_7 viene spostato (verso destra) 16 volte, finirà in B
Il disco D_8 viene spostato (verso sinistra) 8 volte, finirà in B

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A
Il disco D_5 viene spostato (verso destra) 63 volte, finirà in A
Il disco D_6 viene spostato (verso sinistra) 32 volte, finirà in B
Il disco D_7 viene spostato (verso destra) 16 volte, finirà in B
Il disco D_8 viene spostato (verso sinistra) 8 volte, finirà in B
Il disco D_9 viene spostato (verso destra) 4 volte, finirà in B

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A
Il disco D_5 viene spostato (verso destra) 63 volte, finirà in A
Il disco D_6 viene spostato (verso sinistra) 32 volte, finirà in B
Il disco D_7 viene spostato (verso destra) 16 volte, finirà in B
Il disco D_8 viene spostato (verso sinistra) 8 volte, finirà in B
Il disco D_9 viene spostato (verso destra) 4 volte, finirà in B
Il disco D_{10} viene spostato (verso sinistra) 2 volte, finirà in B

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A
Il disco D_5 viene spostato (verso destra) 63 volte, finirà in A
Il disco D_6 viene spostato (verso sinistra) 32 volte, finirà in B
Il disco D_7 viene spostato (verso destra) 16 volte, finirà in B
Il disco D_8 viene spostato (verso sinistra) 8 volte, finirà in B
Il disco D_9 viene spostato (verso destra) 4 volte, finirà in B
Il disco D_{10} viene spostato (verso sinistra) 2 volte, finirà in B
Il disco D_{11} viene spostato (verso destra) 1 volte, finirà in B

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A
Il disco D_5 viene spostato (verso destra) 63 volte, finirà in A
Il disco D_6 viene spostato (verso sinistra) 32 volte, finirà in B
Il disco D_7 viene spostato (verso destra) 16 volte, finirà in B
Il disco D_8 viene spostato (verso sinistra) 8 volte, finirà in B
Il disco D_9 viene spostato (verso destra) 4 volte, finirà in B
Il disco D_{10} viene spostato (verso sinistra) 2 volte, finirà in B
Il disco D_{11} viene spostato (verso destra) 1 volte, finirà in B
Il disco D_{12} viene spostato (verso sinistra) 0 volte, resterà in A

dopo 2017 mosse

Il disco D_1 viene spostato (verso destra) 1009 volte, finirà in B
Il disco D_2 viene spostato (verso sinistra) 504 volte, finirà in A
Il disco D_3 viene spostato (verso destra) 252 volte, finirà in A
Il disco D_4 viene spostato (verso sinistra) 126 volte, finirà in A
Il disco D_5 viene spostato (verso destra) 63 volte, finirà in A
Il disco D_6 viene spostato (verso sinistra) 32 volte, finirà in B
Il disco D_7 viene spostato (verso destra) 16 volte, finirà in B
Il disco D_8 viene spostato (verso sinistra) 8 volte, finirà in B
Il disco D_9 viene spostato (verso destra) 4 volte, finirà in B
Il disco D_{10} viene spostato (verso sinistra) 2 volte, finirà in B
Il disco D_{11} viene spostato (verso destra) 1 volte, finirà in B
Il disco D_{12} viene spostato (verso sinistra) 0 volte, resterà in A

Nessun disco si trova in posizione C... Quando succederà di nuovo?

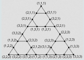
Altre domande che ci possiamo porre

Domanda

Quali configurazioni si incontrano durante il processo risolutivo?

Ci sono in tutto 3^n configurazioni dei dischi (tutti i numeri di n cifre in base 3, ma solo 2^n compaiono durante le mosse

Come si fa a raggiungere una determinata configurazione nel modo più rapido?

Quante mosse ci vogliono? 

Somiglia al problema di trovare geodetiche nel triangolo di Sierpinski

Grazie!

Siete invitati da noi (via Musei 41) oggi pomeriggio alle 15