Piastrelle pentagonali, un rompicapo durato quasi un secolo

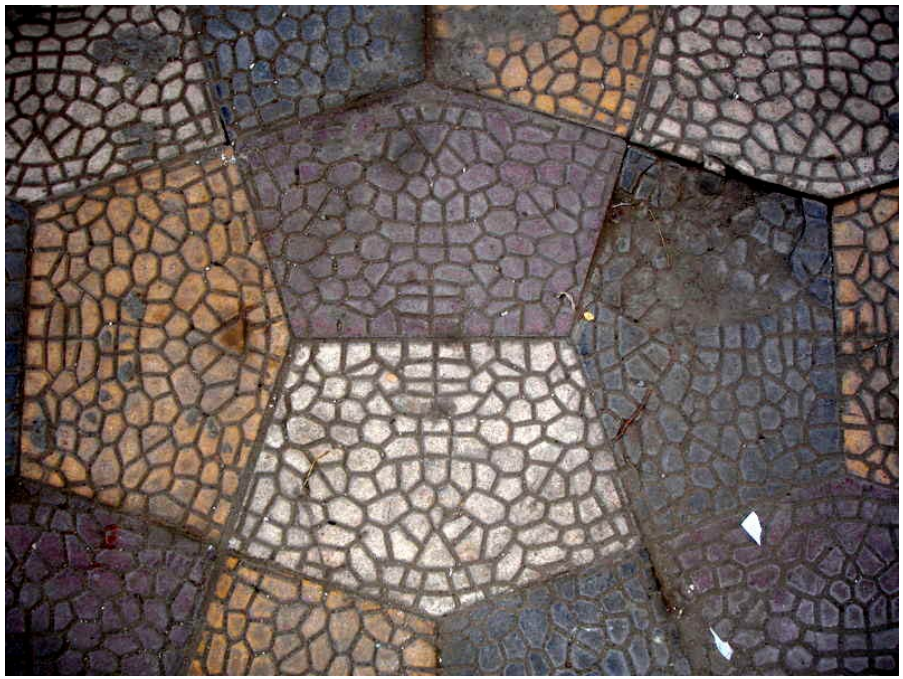
Andrea Galasso

20 ottobre 2017

"Many of the brightly coloured, tile-covered walls and floors of the Alhambra in Spain show us that the Moors were masters in the art of filling a plane with similar interlocking figures, bordering each other without gaps. What a pity that their religion forbade them to make images!" - M. C. Escher

Piastrelle intorno a noi...

Siamo circondati da pavimenti con mattonelle di tantissime forme, alcune hanno ispirato anche Escher.



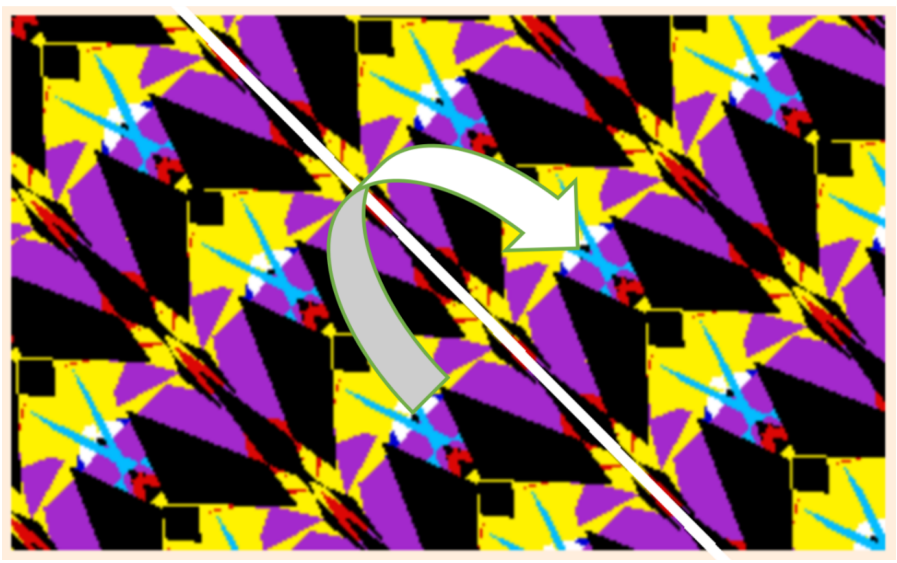
Un pavimento lungo le strade a Il Cairo.

L'Alhambra, un complesso palaziale andaluso a Granada.

Simmetrie

Alcuni esempi di wallpaper group.

Solo traslazioni.



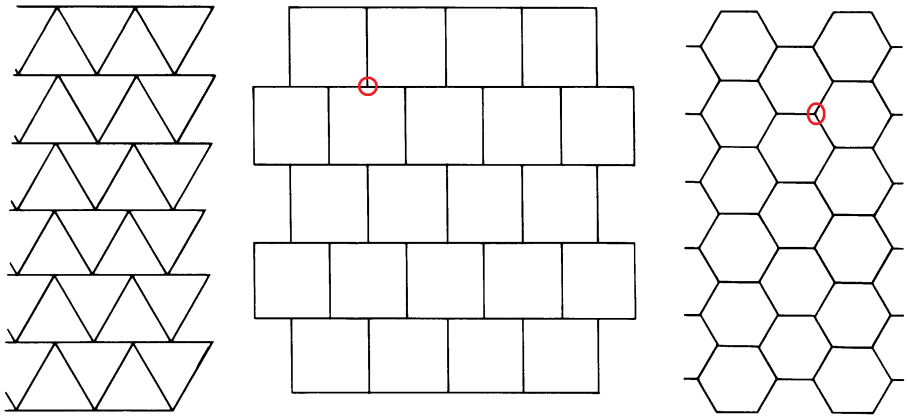
Riflessioni e traslazioni.

Un'infinità di forme

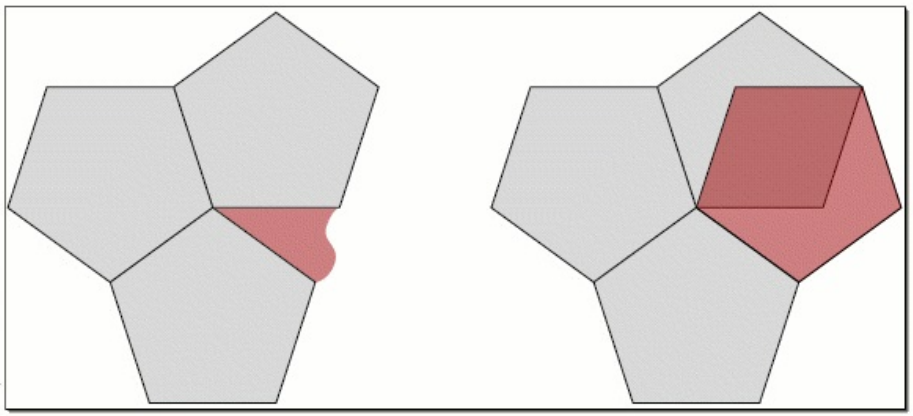
Uno dei più antichi problemi in geometria richiede quali forme possano **ricoprire** il piano. I dipinti di Escher illustrano la straordinaria varietà di possibili forme che possono fare ciò.

I poligoni regolari

Abbiamo familiarità con tassellazioni costituite da triangoli equilateri, quadrati, o esagoni regolari.

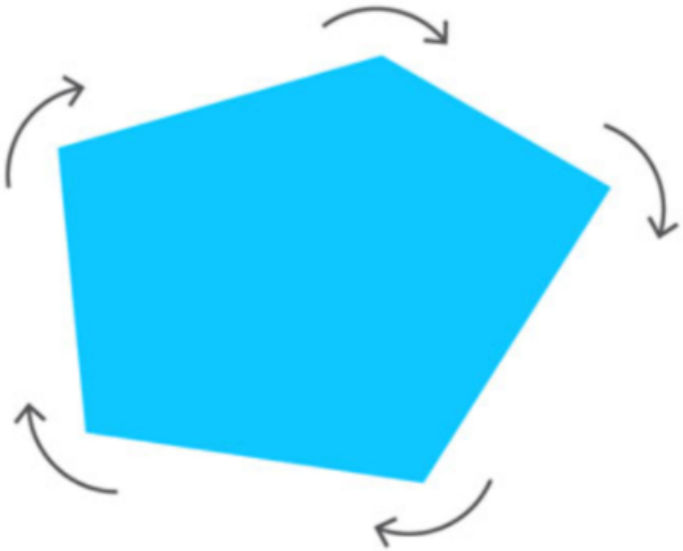


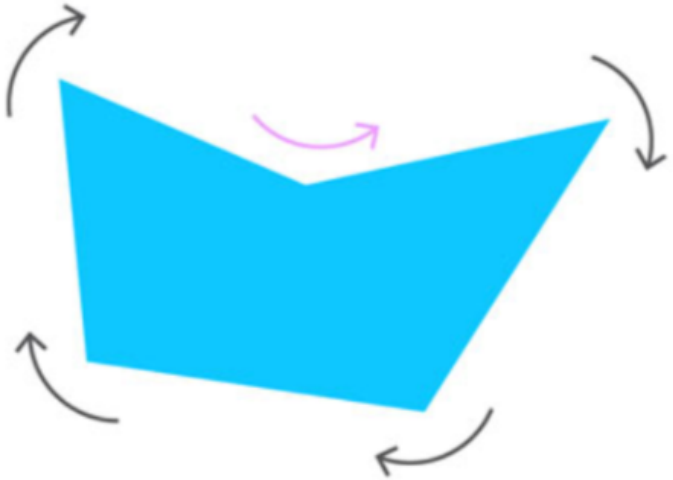
E il pentagono?



Convessità

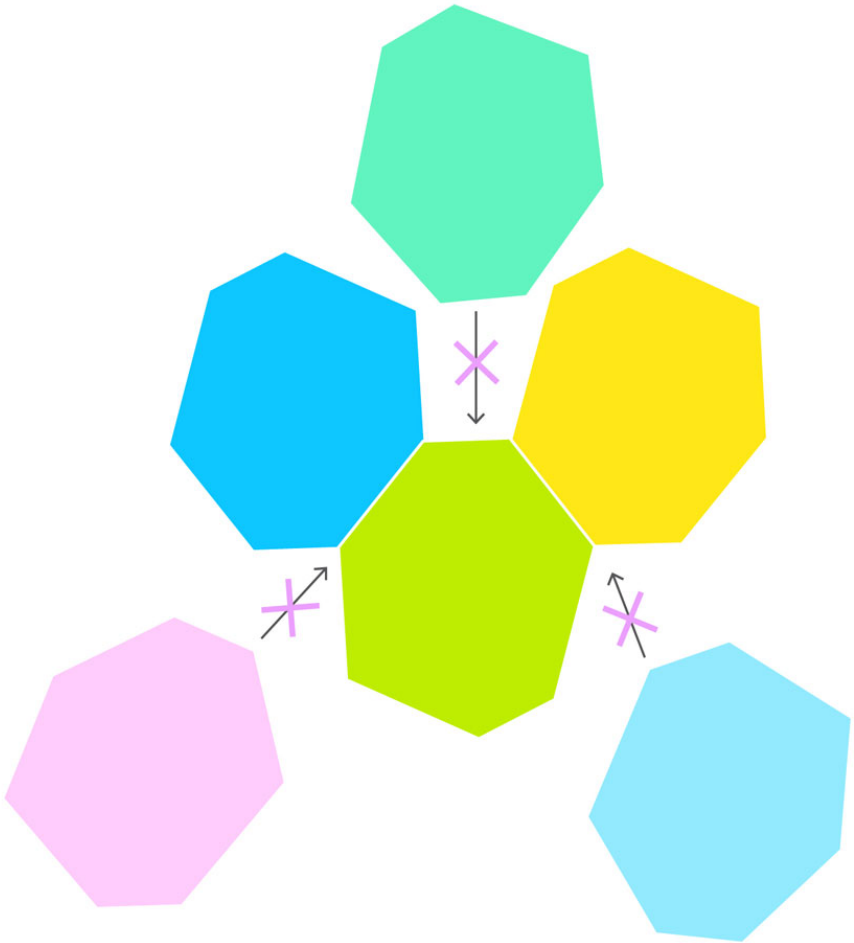
Quali poligoni convessi possono tassellare il piano?





Più di sei non si può!

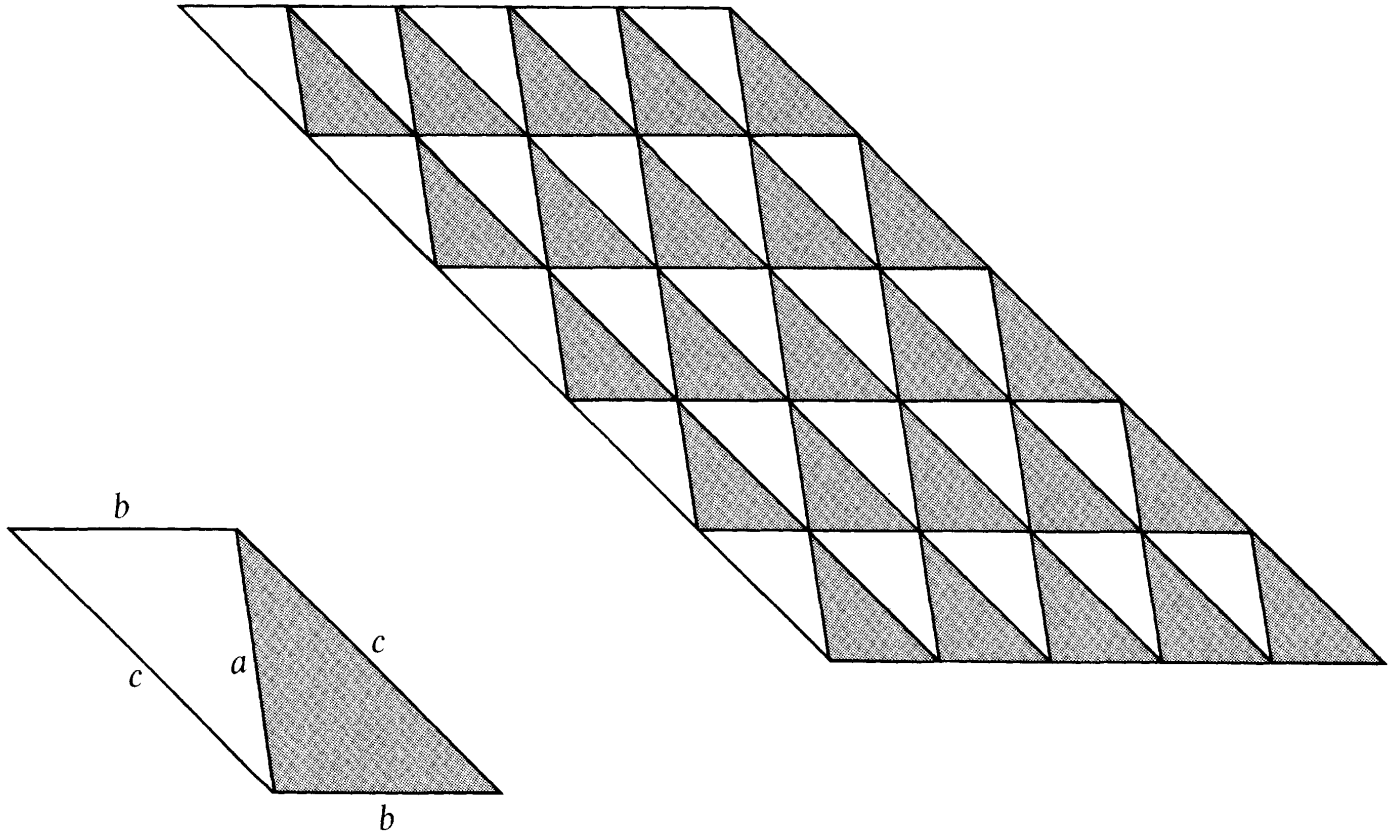
Se ci chiediamo quali **poligoni convessi** possono tassellare il piano la questione si fa più interessante.



Proviamo con gli eptagoni! Per semplicità consideriamo tassellazioni vertice-a-vertice. La somma degli angoli interni è 900°, quindi in media un angolo misura $900/7$ gradi. I vertici hanno 360° da spartirsi, quindi, in media $360/(900/7) = 2,8$ eptagoni si incontreranno in un vertice. Ma almeno tre eptagoni si devono incontrare in un vertice, la media $2,8$ è impossibile! E il problema peggiora se il numero dei lati cresce...

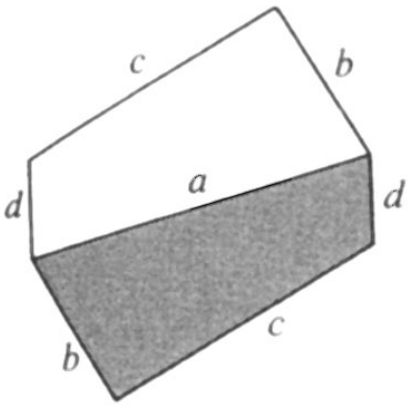
I triangoli

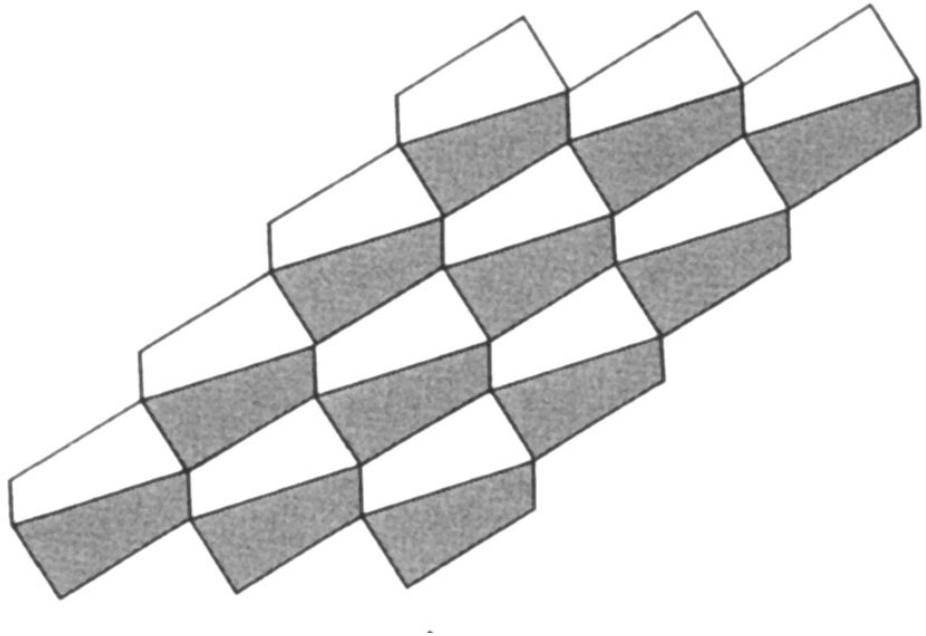
Creiamo un parallelogramma con due copie del triangolo dato e trasliamo così da ottenere una striscia infinita!



I quadrilateri

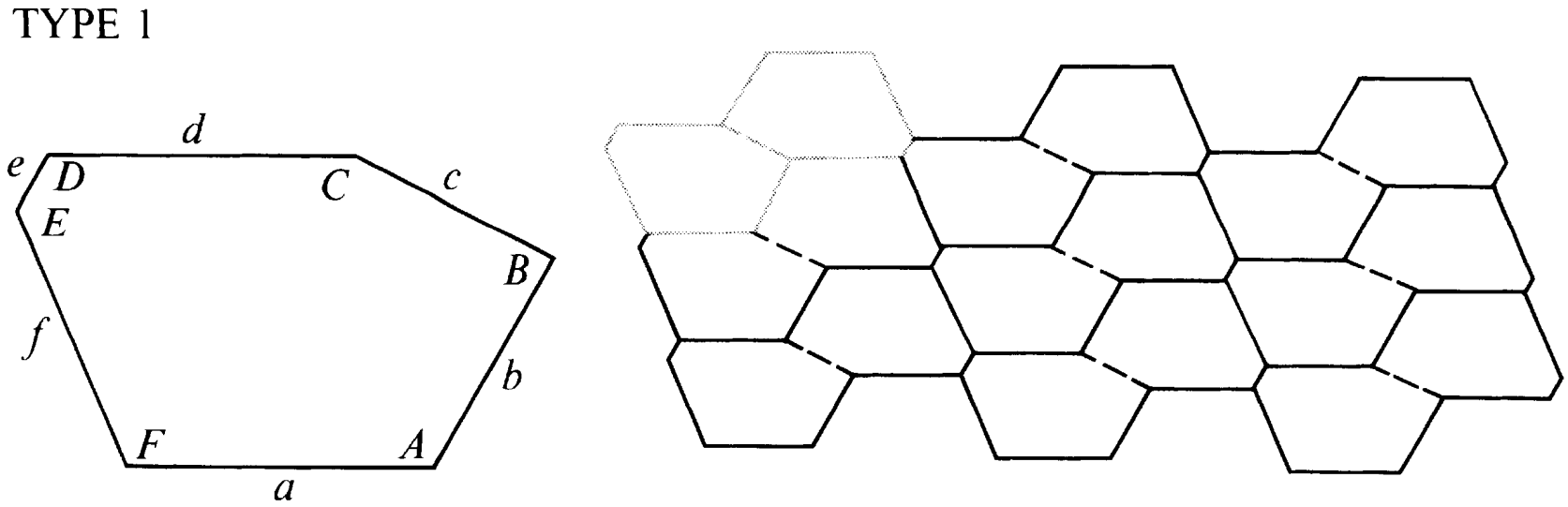
Operiamo una simmetria centrale così da ottenere un esagono. Tale esagono a lati opposti uguali e paralleli: possiamo tassellare il piano!





Gli esagoni

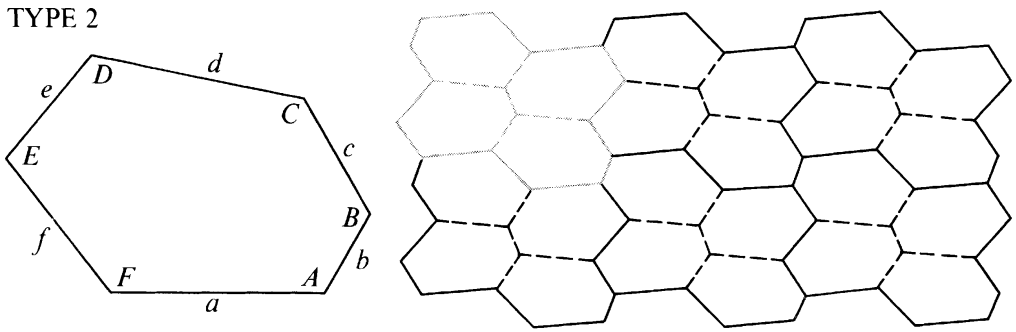
Nel 1918 K. Reinhardt mostrò che ogni esagono convesso appartiene ad una delle tre classi seguenti.



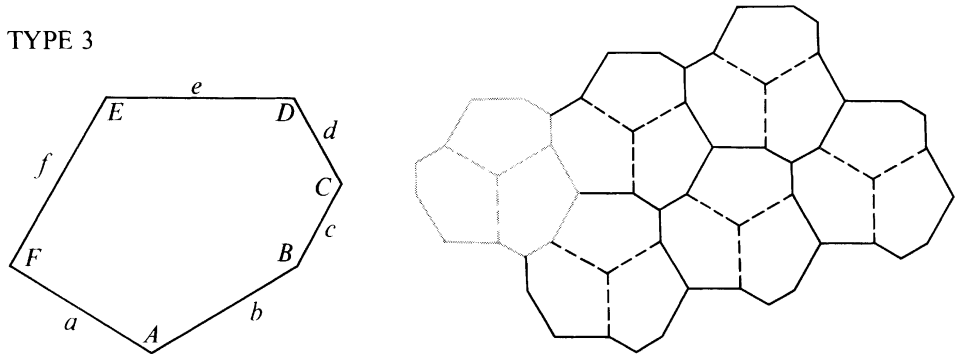
Il primo tipo ha angoli $A + B + C = 360°$ e lati $a = d$.

Gli esagoni

Il secondo ha $A + B + D = 360°$ e lati $a = d\,, c = e$.



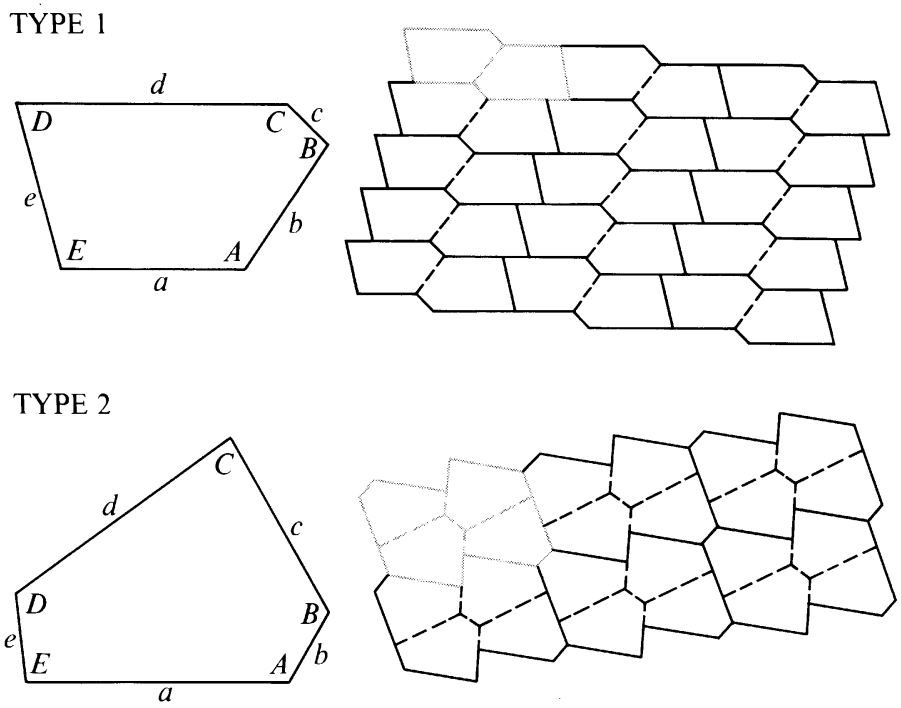
Il terzo $A = C = E = 120°$ e lati $a = b\,, c = d\,, e = f$.



Un esagono ricopre il piano solo se genera una tassellazione isoedrale.

I pentagoni, parte prima

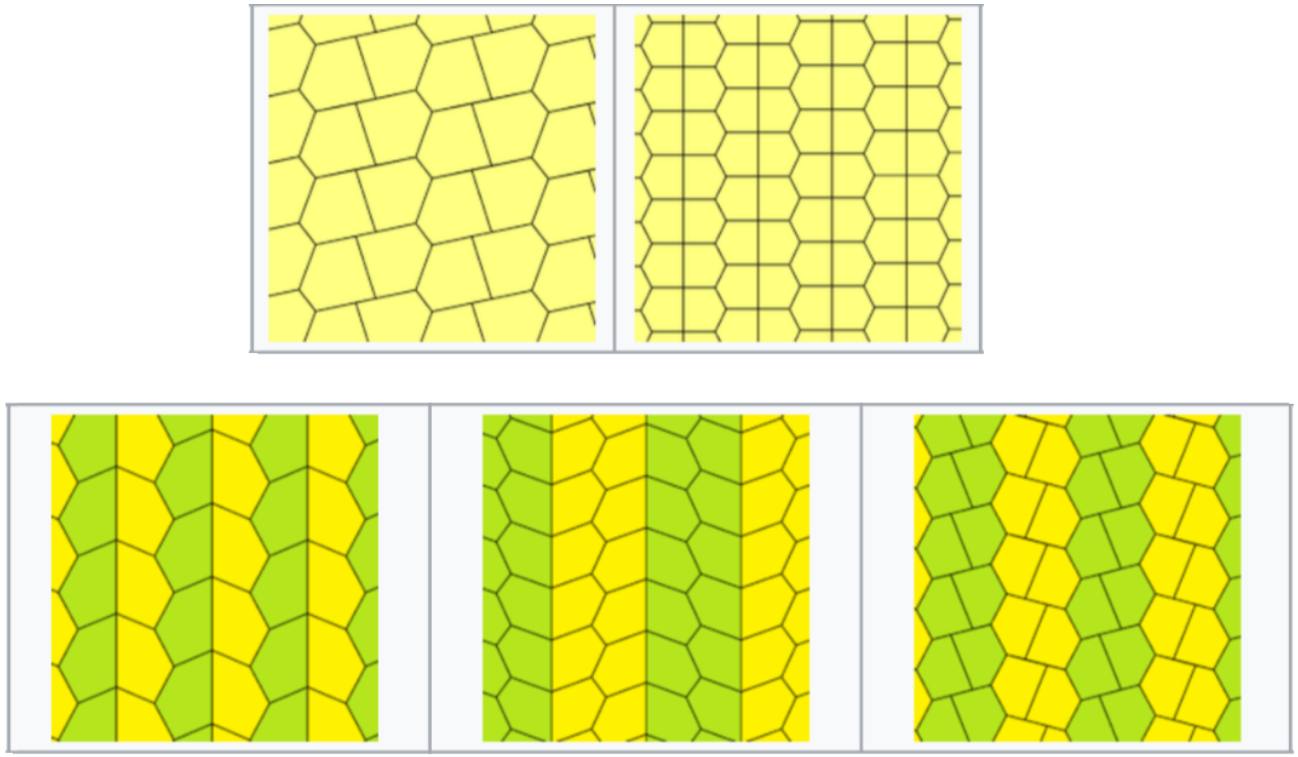
I primi 5 pentagoni furono scoperti dal matematico tedesco Reinhardt.



Le prime due tipologie godono rispettivamente delle seguenti proprietà: 1. $A + B + C = 360°$ e 2. $A + B + D = 360°$ con $a = d$.

I pentagoni, parte prima

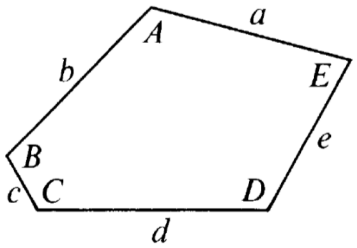
Un pentagono può tassellare il piano in più modi.

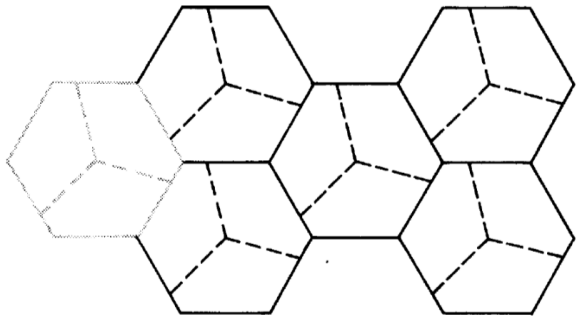


Qui è illustrato un esempio per la prima tipologia.

I pentagoni, parte prima

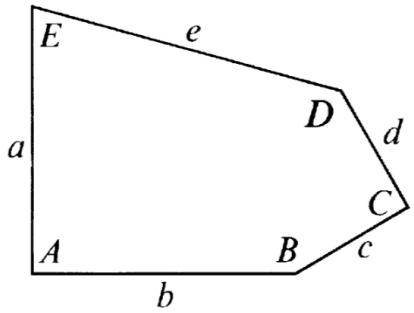
TYPE 3

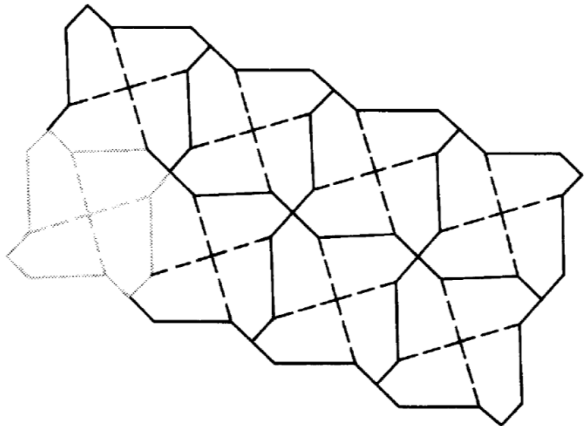




$$A = C = D = 120^\circ,\ a = b\,, d = c + e$$

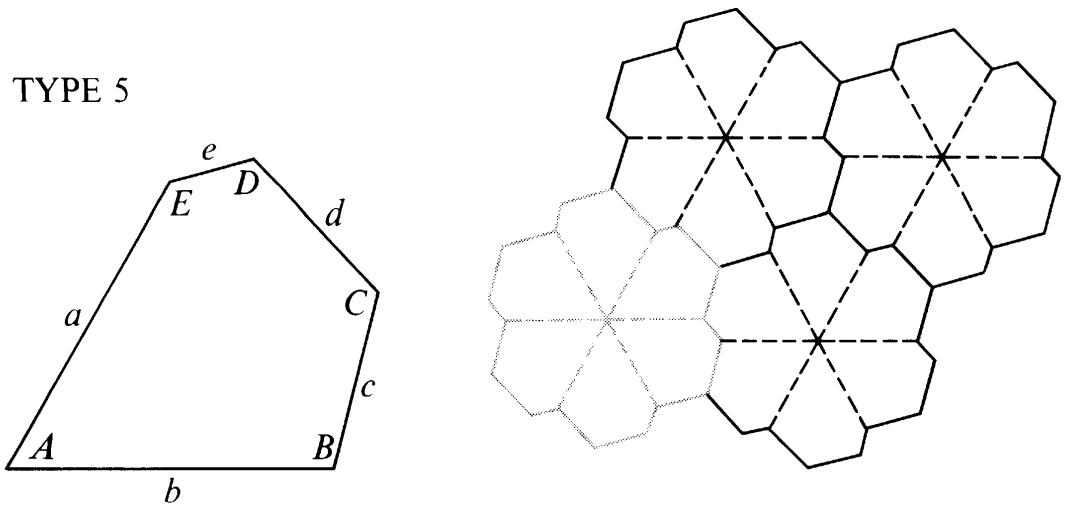
TYPE 4





$$A = C = 90^\circ,\ a = b,\ c = d$$

I pentagoni, parte prima



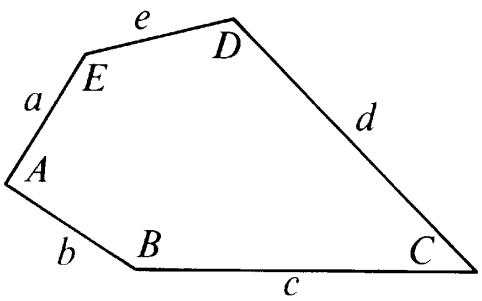
$$A = 60^\circ,\ C = 120^\circ,\ a = b,\ c = d$$

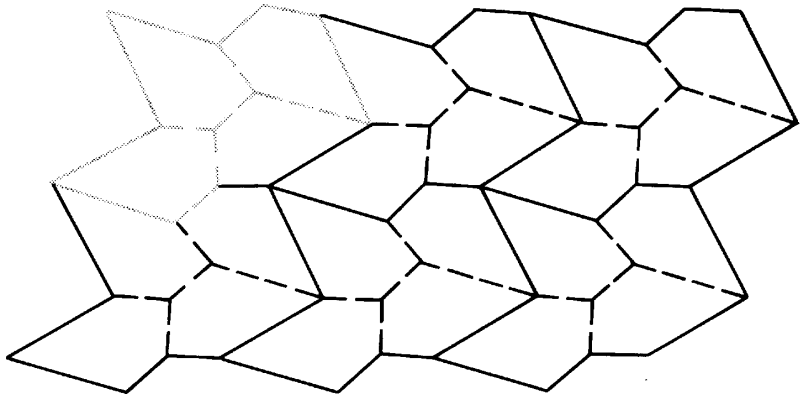
"A questo punto" scrive Kershner, "[...] Reinhardt chiude la tesi affermando che in principio dovrebbe essere possibile completare la lista dei pentagoni [...] ma potrebbe essere molto tedioso e potrebbero non emergerne nuovi".

I pentagoni, parte seconda

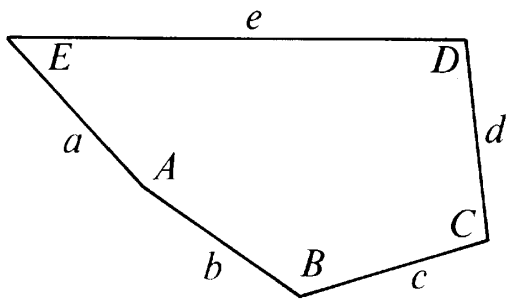
Fu proprio Kershner a scoprire tre nuovi tipi di pentagoni.

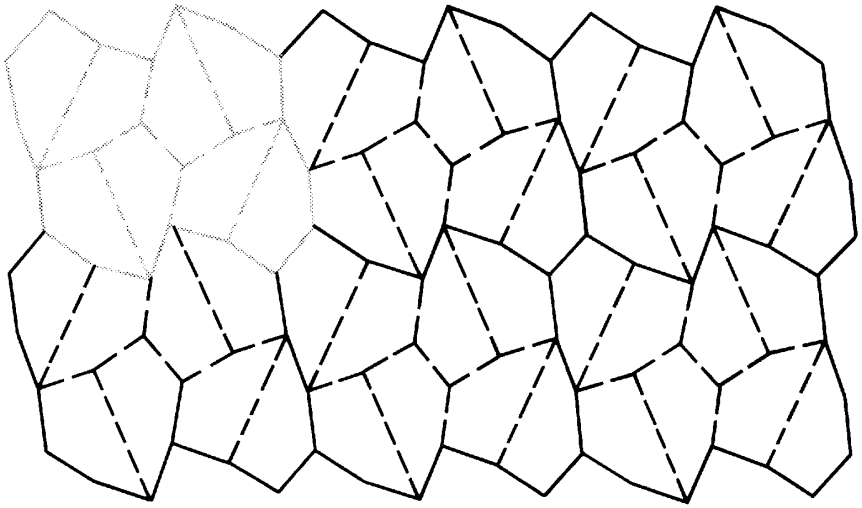
TYPE 6





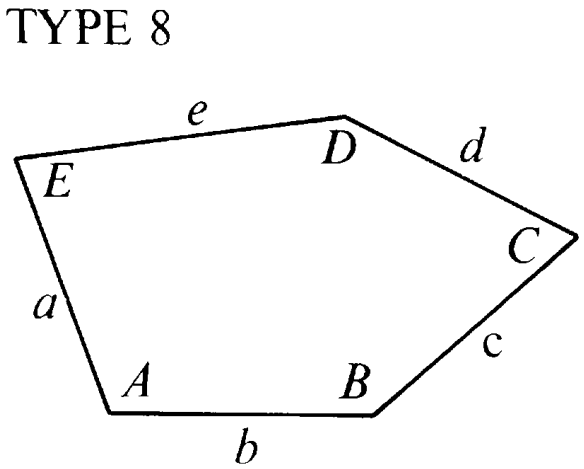
TYPE 7

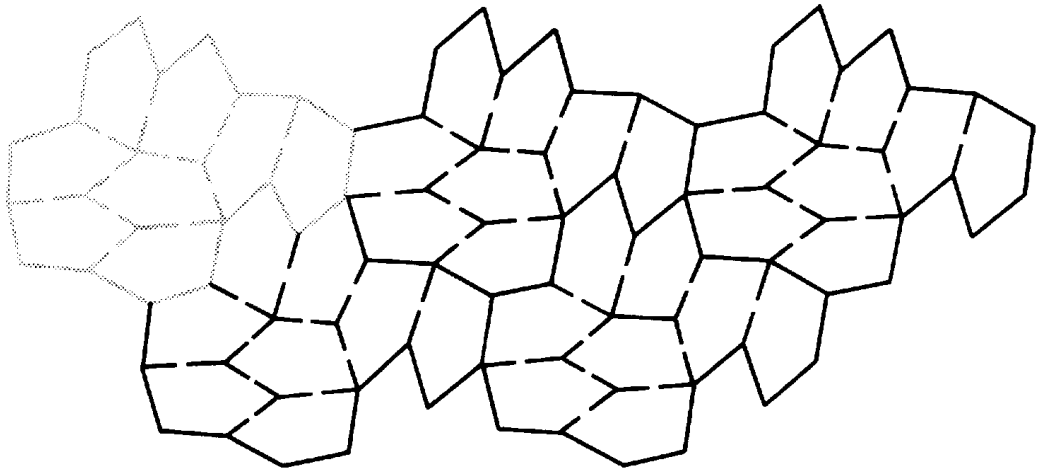




I pentagoni, parte seconda

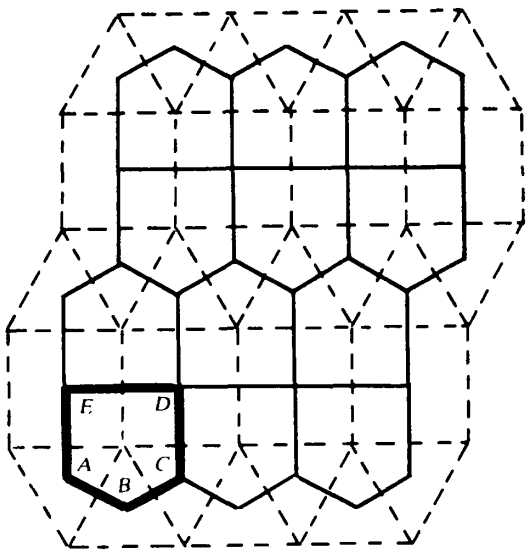
L'articolo di Kershner non include una dimostrazione affermante che non ci sono altri pentagoni convessi. L'editore scrive che "una dimostrazione richiederebbe un libro più grande".



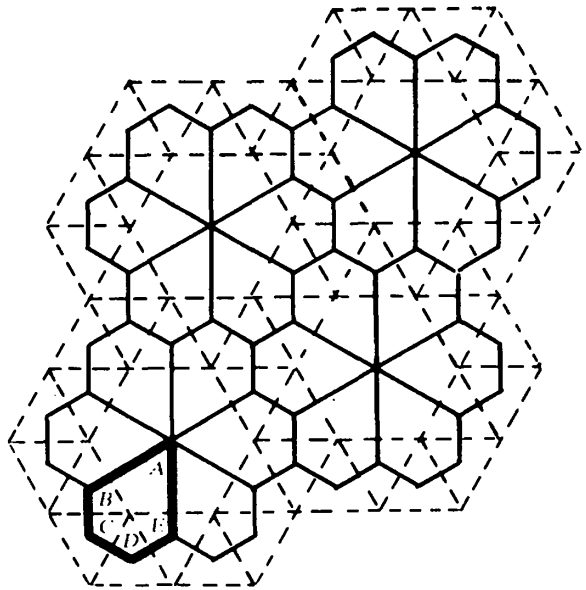


I pentagoni, un confronto

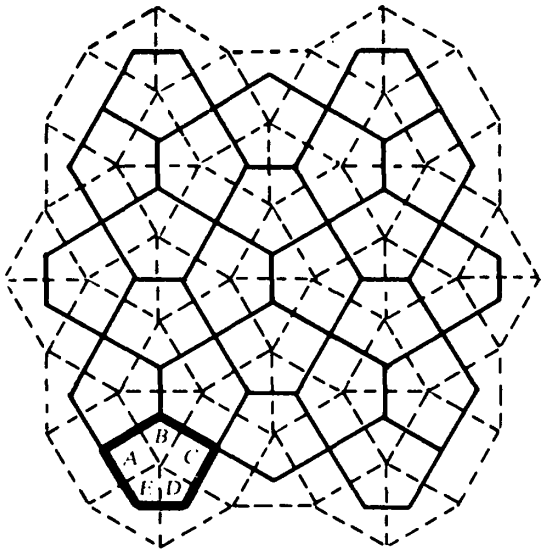
Alcune tassellazioni duali a tassellazioni archimedee.



(1)



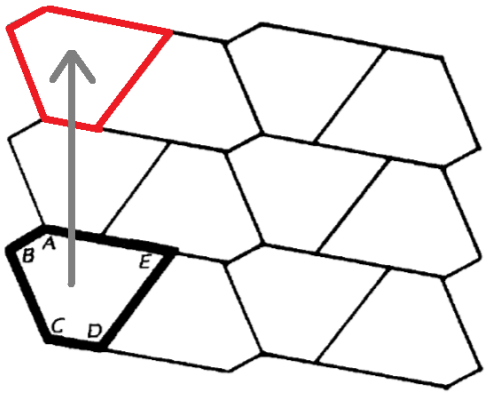
(2)

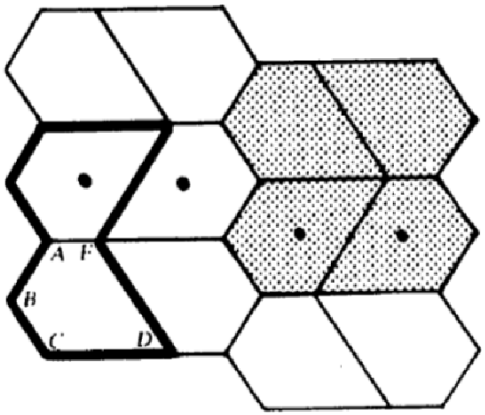


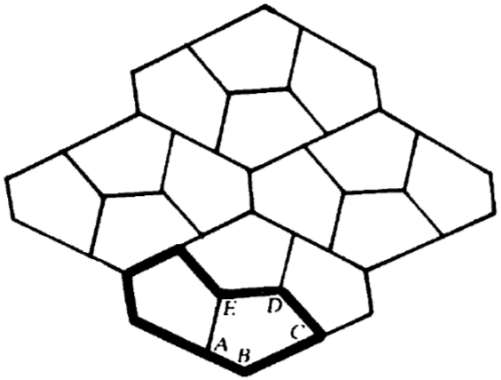
(3)

I pentagoni, un confronto

Tassellazioni vertice-a-vertice o isoedrali?

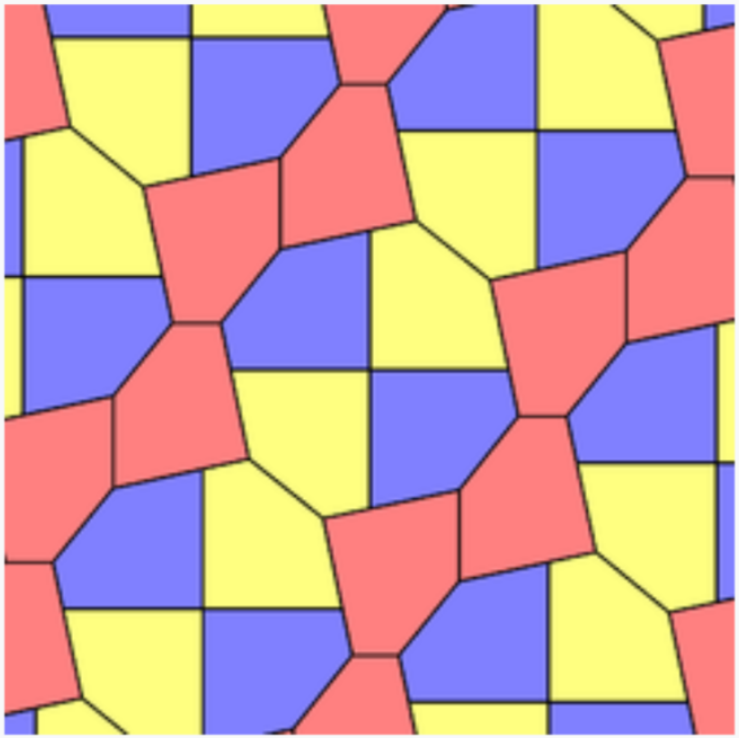






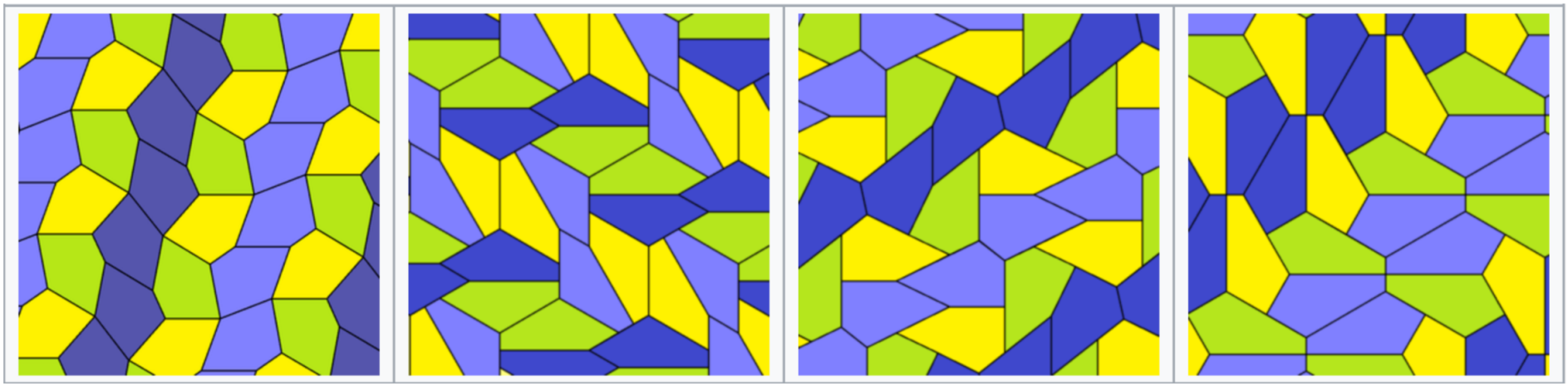
I pentagoni, parte terza

L'informatico Richard E. James III lesse l'articolo di Martin Gardner e suggerì un nuovo pentagono.



I pentagoni, parte quarta

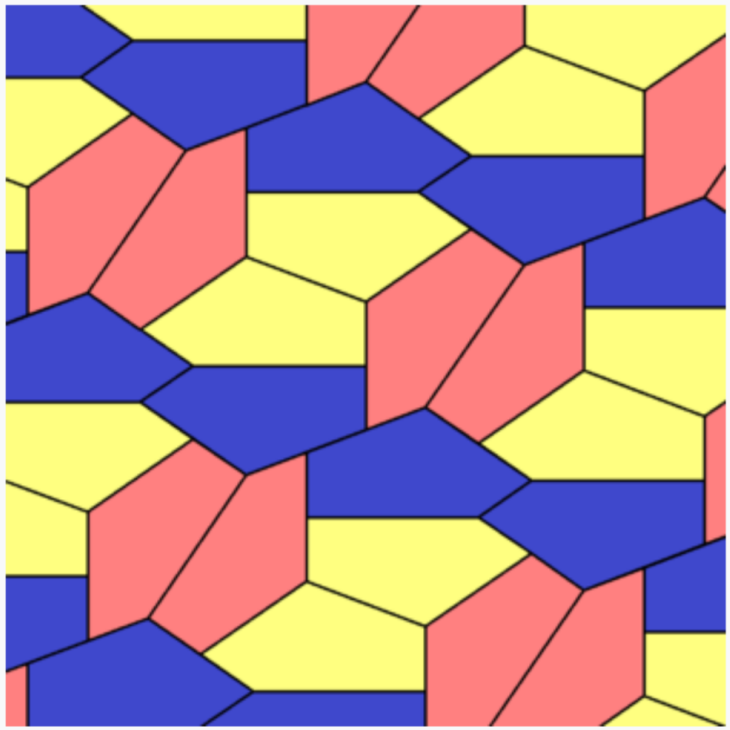
Majorice Rice, che studiò solo un anno matematica alle superiori, scoprì nuove famiglie di tasselli pentagonali. I suoi famigliari raccontavano di vederla spesso in cucina a disegnare schizzi con nuove forme.



Rice è morta il 2 di luglio di quest'anno all'età di 94 anni senza poter apprendere che la ricerca sulle forme pentagonali poteva dirsi conclusa.

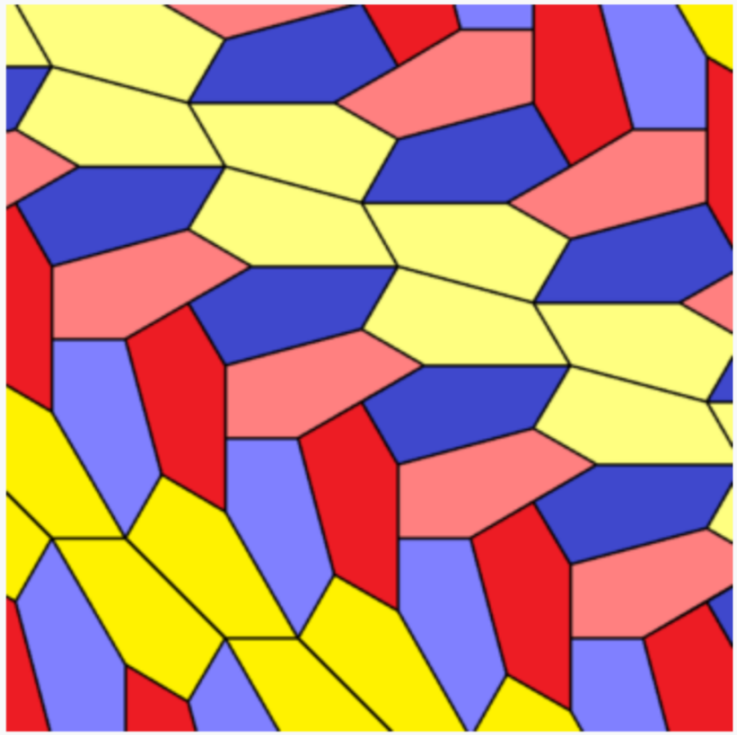
I pentagoni, parte quinta

Nel 1985 Rolf Stein, uno studente tedesco laureato in matematica, ne scoprì una quattordicesima.



I pentagoni, parte sesta

I matematici Casey Mann, Jennifer McLoud e David Von Derau scoprono una nuova forma pentagonale utilizzando un algoritmo nel 2015.

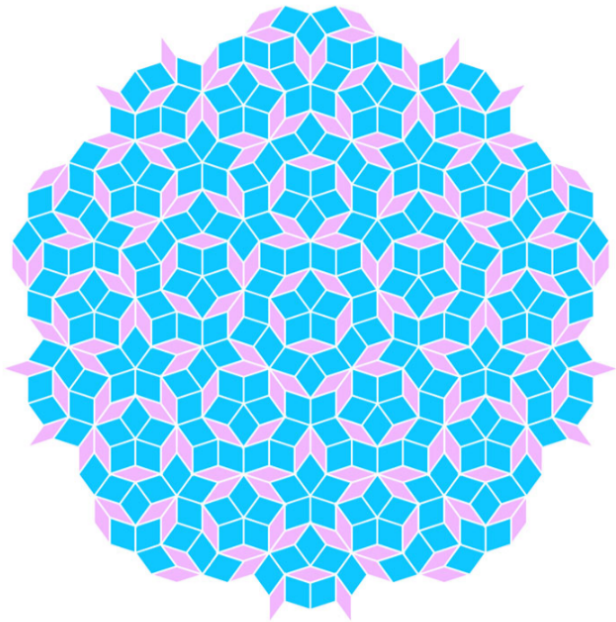


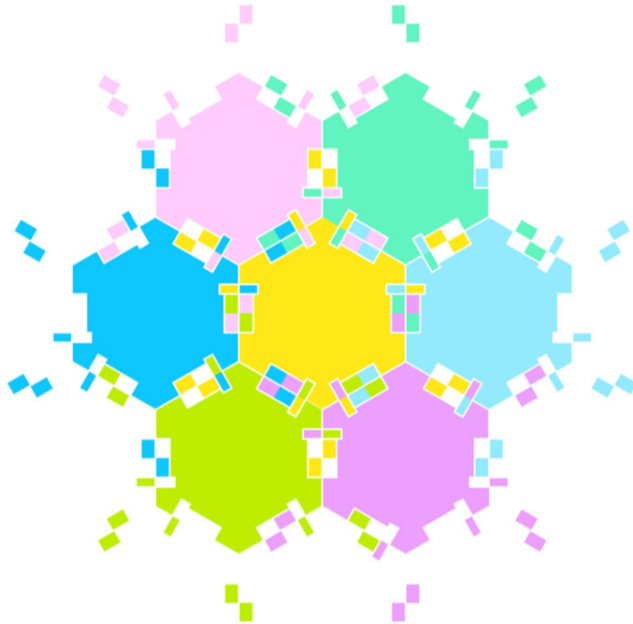
I pentagoni, la fine

Una nuova dimostrazione di Michaël Rao, un matematico 37-enne del CNRS, completa la classificazione dei poligoni convessi che tassellano il piano: i triangolo, i quadrilateri, tre tipi di esagoni e 15 tipi di pentagoni, che hanno resistito per 99 anni.

Tassellazioni aperiodiche

Gli esperti sostengono che ci sono buone ragioni per credere nell'esistenza di una forma in grado di ricoprire il piano in modo non periodico: la chiamano "ein Stein". Si conoscono già tassellazioni non periodiche composte però da almeno due forme distinte oppure una non connessa.





References

- Wikipedia.
- Natalie Wolchover, Pentagon Tiling Proof Solves Century-Old Math Problem, Quanta magazine, 11 luglio 2017.
- Natalie Wolchover, Marjorie Rice's Secret Pentagons, Quanta magazine, 11 luglio 2017.
- Martin Gardner, Time Travel and Other Mathematical Bewilderments, 1988, pp. 163 – 176.
- Doris Schattschneider, Tiling the Plane with Congruent Pentagons, in Mathematics Magazine