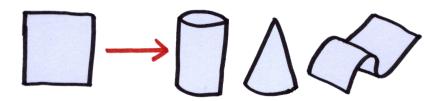
Emanuele Paolini

Università di Firenze

Brescia, 21 ottobre 2013

Quali superfici si possono ottenere incurvando la carta?



Come si rappresenta una superficie matematicamente?

$$u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

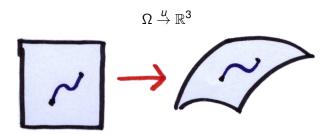
Esempio, la sfera (φ =latitudine, θ =longitudine):

$$u(\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

La matrice delle derivate:

$$Du = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

Immersioni isometriche



Le deformazioni della carta non modificano la lunghezza delle curve:

$$\ell(\gamma) = \ell(\mathsf{u} \circ \gamma)$$

Questa proprietà si può esprimere mediante una equazione alle derivate parziali:

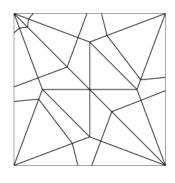
$$Du^tDu = Id$$



Cosa succede se ammettiamo le pieghe?



$$u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$



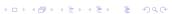
 $\Omega\subset \mathbb{R}^2$







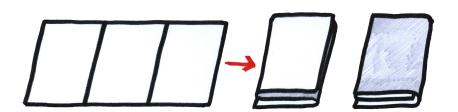
$$Du^tDu = Id$$





il modello delle immersioni isometriche:

- non tiene conto delle sovrapposizioni
- non tiene conto della compenetrazione
- non tiene conto del processo di piegatura
- permette la presenza di parti incurvate
- permette origami con infinite pieghe
- permette origami multidimensionali



il modello delle immersioni isometriche:

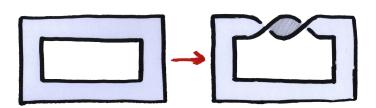
- non tiene conto delle sovrapposizioni
- non tiene conto della compenetrazione
- non tiene conto del processo di piegatura
- permette la presenza di parti incurvate
- permette origami con infinite pieghe
- permette origami multidimensionali



il modello delle immersioni isometriche:

immersioni isometriche

- non tiene conto delle sovrapposizioni
- non tiene conto della compenetrazione
- non tiene conto del processo di piegatura



il modello delle immersioni isometriche:

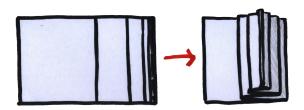
- non tiene conto delle sovrapposizioni
- non tiene conto della compenetrazione
- non tiene conto del processo di piegatura
- permette la presenza di parti incurvate
- · permette origami con infinite pieghe
- permette origami multidimensionali



il modello delle immersioni isometriche:

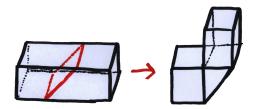
immersioni isometriche

- non tiene conto delle sovrapposizioni
- non tiene conto della compenetrazione
- non tiene conto del processo di piegatura
- permette la presenza di parti incurvate
- · permette origami con infinite pieghe
- permette origami multidimensionali



il modello delle immersioni isometriche:

- non tiene conto delle sovrapposizioni
- non tiene conto della compenetrazione
- non tiene conto del processo di piegatura
- permette la presenza di parti incurvate
- permette origami con infinite pieghe
- permette origami multidimensionali



immersioni isometriche

origami piatti

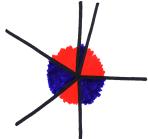
costruzioni frattali

$$u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
 $(n = m)$

- le pieghe sono tutte rettilinee (Teorema di Cartan-Dieudonné)

$$u \colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
 $(n = m)$

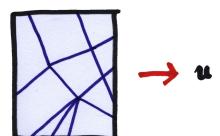
- le pieghe sono tutte rettilinee (Teorema di Cartan-Dieudonné)
- vale la condizione di Kawasaki in ogni nodo del diagramma delle pieghe
- vale il teorema di ricostruzione



origami piatti

$$u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
 $(n = m)$

- le pieghe sono tutte rettilinee (Teorema di Cartan-Dieudonné)
- vale la condizione di Kawasaki in ogni nodo del diagramma delle pieghe
- vale il teorema di ricostruzione



condizione di Dirichlet

equazione implicita alle derivate parziali con condizione di Dirichlet:

$$\begin{cases} Du^t Du = Id & \text{su } \Omega = (0, 1)^2 \\ u = 0 & \text{su } \partial \Omega \end{cases}$$

soluzione tramite origami:

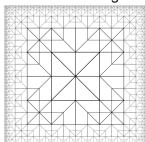
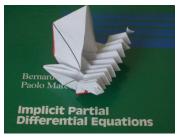


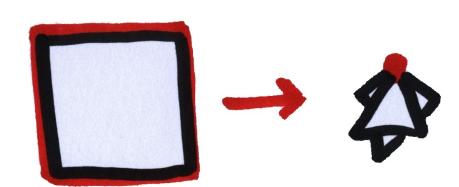
diagramma delle pieghe



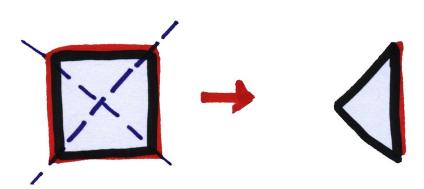
modello piegato

1. il problema non è ovvio!

- 2. mandiamo tutto il bordo su un lato
- 3. applichiamo una suddivisione frattale
- 4. identifichiamo le proprietà che deve avere il modulo base
- 5. troviamo il modulo base



- 1. il problema non è ovvio!
- 2. mandiamo tutto il bordo su un lato
- 3. applichiamo una suddivisione frattale
- 4. identifichiamo le proprietà che deve avere il modulo base
- 5. troviamo il modulo base



- 1. il problema non è ovvio!
- 2. mandiamo tutto il bordo su un lato
- 3. applichiamo una suddivisione frattale
- 4. identifichiamo le proprietà che deve avere il modulo base
- 5. troviamo il modulo base



- 1. il problema non è ovvio!
- 2. mandiamo tutto il bordo su un lato
- 3. applichiamo una suddivisione frattale
- 4. identifichiamo le proprietà che deve avere il modulo base
- 5. troviamo il modulo base



- 1. il problema non è ovvio!
- 2. mandiamo tutto il bordo su un lato
- 3. applichiamo una suddivisione frattale
- 4. identifichiamo le proprietà che deve avere il modulo base
- 5. troviamo il modulo base



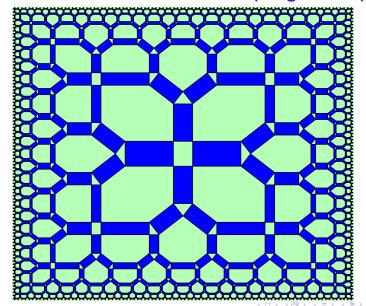
- 1. il problema non è ovvio!
- 2. mandiamo tutto il bordo su un lato
- 3. applichiamo una suddivisione frattale
- 4. identifichiamo le proprietà che deve avere il modulo base
- 5. troviamo il modulo base



condizione lineare al bordo (equazione)

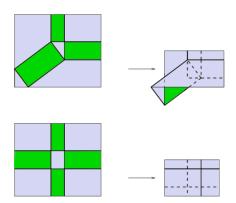
$$\begin{cases} Du^t Du = Id & \text{su } \Omega = \text{rettangolo} \\ u(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \beta x_2) & \text{se } x \in \partial \Omega \end{cases}$$

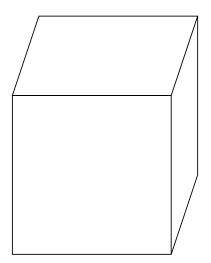
condizione lineare al bordo (diagramma)

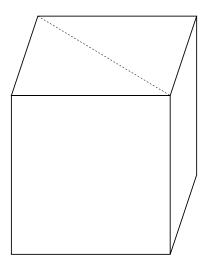


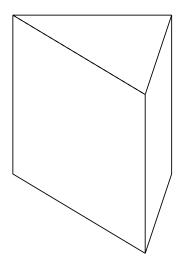


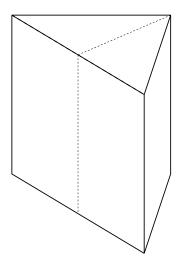
condizione lineare al bordo (moduli base)

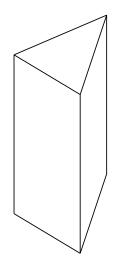


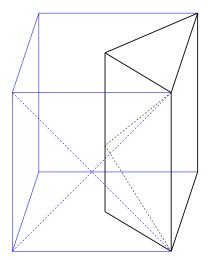


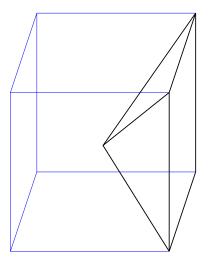


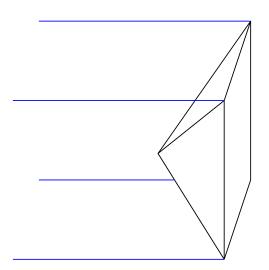




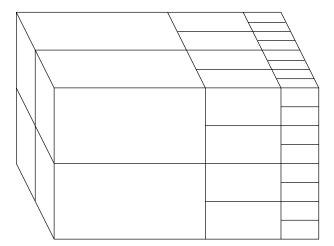




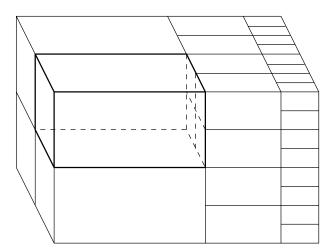




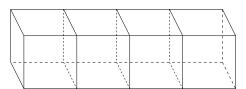
Griglia cubica

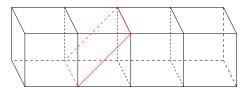


Griglia cubica

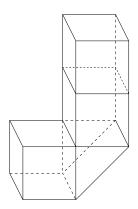


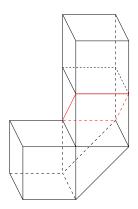
Modulo base

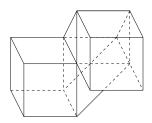


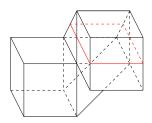


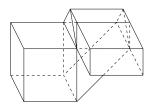
costruzioni frattali costruzioni tridimensionali 00000

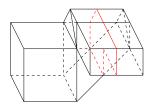


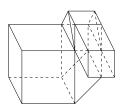


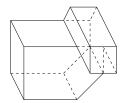


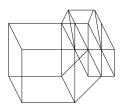


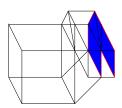


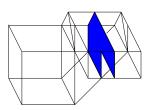


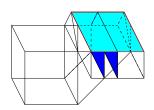


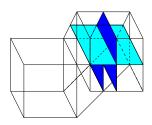


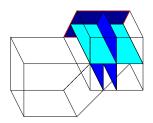


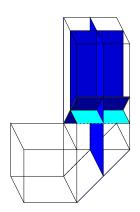


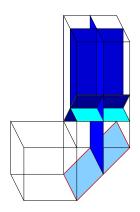












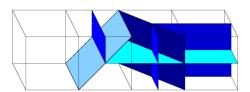


Diagramma di piegatura

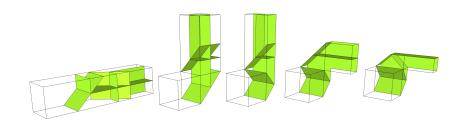
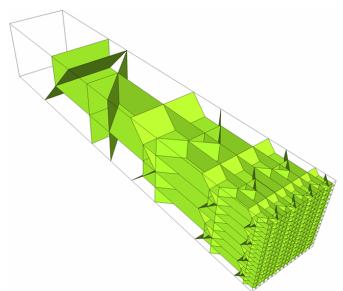


Diagramma risultante



Cubo piegato

