# CELEBRATION OF MIND

## Martin Gardner

## Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia

*Abac*). Supponiamo, aveva scritto Leonardo, che una coppia di conigli adulti sia allevata in una conigliera. Ammettiamo che i conigli cominciino a procliferare all'età di due mesi, generando una coppia maschio-femmina alla fine di ogni mese. Se nessuno dei conigli muore, quanti conigli si troveranno nella conigliera in capo a un anno? Il grafico *sul alberto (a vedia la figura nella pagina precedente)* mostra ciò che avviene nei primi cinque mesi. È facile vedere che il numero di coppie alla fine di ogni mese è successivamente: 1, 2, 3, 5, 8, ... Come osservò lo stesso Fibonacci, ogni numero che compare in

| n | $F_n$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 5 | 5 |
| 6 | 8 |
| 7 | 13 |
| 8 | 21 |
| 9 | 34 |
| 10 | 55 |
| 11 | 89 |
| 12 | 144 |
| 13 | 233 |
| 14 | 377 |
| 15 | 610 |
| 16 | 987 |
| 17 | 1 597 |
| 18 | 2 584 |
| 19 | 4 181 |
| 20 | 6 765 |
| 21 | 10 946 |
| 22 | 17 711 |
| 23 | 28 657 |
| 24 | 46 368 |
| 25 | 75 025 |
| 26 | 121 393 |
| 27 | 196 418 |
| 28 | 317 811 |
| 29 | 514 229 |
| 30 | 832 040 |
| 31 | 1 346 269 |
| 32 | 2 178 309 |
| 33 | 3 524 578 |
| 34 | 5 702 887 |
| 35 | 9 227 465 |
| 36 | 14 930 352 |
| 37 | 24 157 817 |
| 38 | 39 088 169 |
| 39 | 63 245 986 |
| 40 | 102 334 155 |
| 41 | 165 580 141 |
| 42 | 267 914 296 |
| 43 | 433 494 437 |
| 44 | 701 408 733 |
| 45 | 1 134 903 170 |
| 46 | 1 836 311 903 |
| 47 | 2 971 215 073 |
| 48 | 4 807 526 976 |
| 49 | 7 778 742 049 |
| 50 | 12 586 269 025 |

*I primi 50 numeri di Fibonacci.*



questa successione (a eccezione, ovviamente, dei primi due) è la somma dei due numeri che lo precedono. Alla fine dei dodici mesi le coppie di conigli saranno 377.

Fibonacci non indagò le proprietà di questa successione e si dovette attendere l'inizio del diciannovesimo secolo perché, come ebbe a dire un matematico, gli scritti sull'argomento cominciarono a moltiplicarsi quasi alla stessa velocità dei conigli di Fibonacci. Lucas eseguì un profondo studio su quelle successioni (oggi dette « successioni generalizzate di Fibonacci ») che iniziano con una *qualsiasi* coppia di numeri interi, essendo ogni numero successivo la somma dei due che lo precedono. Egli chiamò la più semplice di tali successioni: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... , successione di Fibonacci. La posizione di ogni numero di questa successione è tradizionalmente indicata da un indice, cosicché $F_1=1$, $F_2=2$ e così via. (I primi 50 numeri di Fibonacci sono elencati nella figura di questa pagina.) $F_n$ rappresenta il generico numero di Fibonacci, $F_{n-1}$ il numero che lo segue, e $F_{n-2}$ quello che lo precede. $F_{20}$ è il numero di Fibonacci il cui indice è il doppio di quello di $F_{10}$ e così via.

La successione di Fibonacci ha dato filo da torcere ai matematici per secoli: ci deve al suo inaspettato prematurarsi nei contenti più vari, ma soprattutto al fatto che anche il meno smaliziato dilettante di teoria dei numeri, senza conoscenze al di là dell'aritmetica elementare, può indagare le proprietà della successione e scoprire quella che sembra una varietà senza fine di teoremi curiosi. Recentemente, certi sviluppi della teoria della programmazione dei calcolatori hanno ridestato interesse attorno alla successione: si è infatti trovato che essa può essere utilmente applicata alla classificazione dei dati, alla ricerca delle informazioni, alla generazione di numeri casuali e persino alla ricerca di metodi rapidi per approssimare gli estremi (valori massimi o minimi) di funzioni le cui derivate non siano note.

I più artistici risultati attorno alla successione sono riassunti nel capitolo 17 del primo volume della *History of the Theory of Numbers* di Leonard Eugene Dickson. Il lettore interessato alle scoperte più recenti può consultare « The Fibonacci Quarterly » pubblicata dal 1963 dalla Fibonacci Association. (Il prezzo annuale è ora di sei dollari, le domande di abbonamento vanno rivolte all'amministratore, Franklin Alfred Brousseau, al St. Mary's College, in California.) Edita da Verner E. Hoggatt jr. del San Jose State College in California, la rivista si occupa principalmente dei numeri di Fibonacci generalizzati (quali per esempio i « numeri di Tribonacci » che sono la somma dei *tre* numeri antecedenti), ma anche delle « stalle di numeri interi dotati di proprietà particolari ».

Certamente la proprietà più importante della successione di Fibonacci (e che vale anche per le successioni generalizzate) è costituita dal fatto che il rapporto tra due numeri consecutivi di essa è alternativamente maggiore o minore del rapporto aureo e che, a procedere della successione, la differenza va diminuendo sempre più, sicché la successione di questi rapporti tende sempre come proprio limite il rapporto aureo. Quindi è il famoso numero irrazionale 1,61803... che si ottiene dividendo per la somma di 1 con la radice quadrata di 5. Si è scritto molto, e non sempre assennatamente, sul presentarsi del rapporto aureo e della successione di Fibonacci a esso strettamente collegata nello sviluppo di alcuni esseri viventi, oltre che sulla possibilità di applicare rapporto aureo e successione all'arte, all'architettura e persino alla poesia. Un professore di lettere classiche dell'Università di Princeton, George Eckel Duckworth, nel suo libro *Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid* (University of Michigan Press, 1962) sostiene che Virgilio e altri poeti latini del tempo facevano uso consapevole della successione di Fibonacci. Personalmente, non sono occupato di queste questioni qualche tempo fa in un articolo sul rapporto aureo, riprodotto nel secondo volume di *Enigmi e giochi matematici* (Sansoni, 1968).

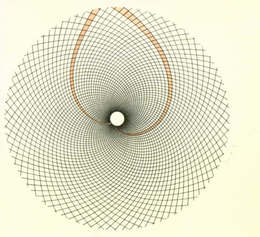
La più sorprendente apparizione della successione di Fibonacci nel regno vegetale si ha nella disposizione spirale dei semi sulla superficie di certe varietà di girasoli. Ci sono due insiemi di spirali logaritmiche, quelle dell'uno avvolte in senso orario e quelle dell'altro in senso antiorario, come si vede dalla figura a fronte. I numeri delle spirali dei due tipi non sono uguali fra loro e tendono a essere due numeri di Fibonacci consecutivi. Per esempio, entrate girasoli di dimensioni medie hanno di solito 34 e 55 spirali, certi esemplari giganti giungono a 89 e 144. In una lettera a « The Scientific Monthly » (novembre 1955) un geologo del City College di New York, Daniel T. O'Connell, e sua moglie informano di aver rinvenuto un esemplare di girasole gigante con 144 e 233 spirali!

Lo stretto legame tra il rapporto aureo e la successione di Fibonacci è evidente dalla formula seguente che dà l'ennesimo numero di Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n$$

Questa uguaglianza fornisce l'ennesimo numero di Fibonacci in modo esatto, ma è poco pratica per numeri di Fibonacci (che diremo per brevità numeri *F*) grandi, anche se l'uso dei logaritmi consente buone approssimazioni. Una formula molto più semplice per l'ennesimo numero *F* è costituita dalla « potenza del rapporto aureo divisa per la radice quadrata di cinque; con questa formula il numero va diminuendo sempre più, sicché la successione di questi rapporti tende sempre come proprio limite il rapporto aureo. Quindi è il famoso numero irrazionale 1,61803... che si ottiene dividendo per la somma di 1 con la radice quadrata di 5. Si è scritto molto, e non sempre assennatamente, sul presentarsi del rapporto aureo e della successione di Fibonacci a esso strettamente collegata nello sviluppo di alcuni esseri viventi, oltre che sulla possibilità di applicare rapporto aureo e successione all'arte, all'architettura e persino alla poesia. Un professore di lettere classiche dell'Università di Princeton, George Eckel Duckworth, nel suo libro *Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid* (University of Michigan Press, 1962) sostiene che Virgilio e altri poeti latini del tempo facevano uso consapevole della successione di Fibonacci. Personalmente, non sono occupato di queste questioni qualche tempo fa in un articolo sul rapporto aureo, riprodotto nel secondo volume di *Enigmi e giochi matematici* (Sansoni, 1968).

La più sorprendente apparizione della successione di Fibonacci nel regno vegetale si ha nella disposizione spirale dei semi sulla superficie di certe varietà di girasoli. Ci sono due insiemi di spirali logaritmiche, quelle dell'uno avvolte in senso orario e quelle dell'altro in senso antiorario, come si vede dalla figura a fronte. I numeri delle spirali dei due tipi non sono uguali fra loro e tendono a essere due numeri di Fibonacci consecutivi. Per esempio, entrate girasoli di dimensioni medie hanno di solito 34 e 55 spirali, certi esemplari giganti giungono a 89 e 144. In una lettera a « The Scientific Monthly » (novembre 1955) un geologo del City College di New York, Daniel T. O'Connell, e sua moglie informano di aver rinvenuto un esemplare di girasole gigante con 144 e 233 spirali!



*Girasole con 55 spirali antiorarie e 89 orarie.*

2) la somma dei quadrati di due numeri *F* successivi: $F_n^2 + F_{n+1}^2$ è $F_{2n+1}$. Poiché l'indice di $F_{2n+1}$ è dispari, ne segue che, scritta la successione dei quadrati dei numeri di Fibonacci, le somme delle coppie di quadrati successivi forniscono la successione dei numeri *F* di indice dispari.

3) Se *a*, *B*, *C*, *D* sono quattro numeri di Fibonacci consecutivi, allora vale la formula: $C^2 - B^2 = a^2 \times D$.

4) La successione delle cifre finali dei numeri della successione di Fibonacci si ripete in cicli di 60. Le ultime due cifre si ripetono in cicli di 300. Il cifre di 1 dal prodotto del numero che lo precede con quello che lo segue. Il segno della differenza è alternativamente positivo o negativo al procedere della successione. Questa proprietà (e molte altre della successione di Fibonacci) è un caso speciale di una proprietà valida in generale per tutte le successioni che iniziano con una qualunque coppia di numeri. Anche nel caso generale, cioè, la differenza in parola è una costante alternativamente positiva o negativa. Per esempio, nel caso della successione 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... (la più semplice dopo quella di Fibonacci) studiata dal matematico francese Lucas, il valore costante della differenza è 5.



# GIOCHI MATEMATICI

*di Martin Gardner*

*Le fantastiche combinazioni del nuovo solitario di Conway, la « Vita ».*

Gran parte dell'opera di John Horton Conway, matematico del Gonville and Caius College dell'Università di Cambridge, è stata dedicata alla matematica pura. Per esempio, nel 1967, scoperse un nuovo gruppo – che alcuni chiamano « costellazione di Conway » – comprendente tutti i gruppi sporadici allora conosciuti, salvo due (si dicono « sporadici » in quanto non rientrano in nessun schema di classificazione). Si tratta di una scoperta che in efficacia, in modo che le più efficaci abbiano luogo per prime e via via le altre in ordine decrescente. Se non si ottiene nessuna soluzione il programma incrocia da capo e passa alla seconda prova. È impossibile descrivere il programma in modo più dettagliato, ma i lettori interessati possono trovare una spiegazione esauriente, con *flow chart* ed esempi, in *A Heuristic Solution to the Tangram Puzzle*, di E. S. Deutsch e Kenneth C. Haves Jr., in *Machine Intelligence 7*, curato da Bernard Meltzer e Donald Michie (Wiley, 1972). Un programma abbastanza simile è stato sviluppato da Eivind Lyngning, uno studente danese che lavora con Jacques Cohen, un fisico della Brandeis University.

I tangram compatti sono generalmente più difficili da ricomporre di quelli non compatti (sia per una persona sia per un calcolatore) e la difficoltà tende a crescere col diminuire del numero formato dal logico ingiese R. L. Goodstein, che, indipendentemente dalla lunghezza dei lati, ha dimostrato che ogni figura piana può essere tracciata nelle dell'idea, una viene alla fine ridotta a un insieme di teste (or ne possono essere milioni, anche se la forma iniziale dell'animale è semplice) tutte direttamente unite alla radice. Esse vengono allora eliminate uno per una, finché l'idra, senza teste, muore.

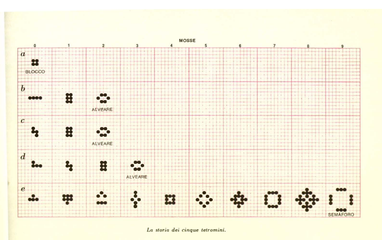
Si può affrontare meglio il gioco dell'idra pensando l'albereccome un modello di un insieme di scatole infilate le une nelle altre. Ciascuna scatola contiene tutte le scatole che si raggiungono spostandosi da essa in senso orario. Per esempio, nel 1979 in rete con non di simmetria verticale. Per l'anniversario di matrimonio dei suoi genitori, Kim dovette sua torta con una glassa di cioccolata e vaniglia che formava la combinazione che si vede nella pagina a fianco. (« Lenere » è nero, « Pearls » è perle, « Mirrors » è specchi.) Nel numero di Kim « figura a cilindro. Ne troverete un altro esempio in *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, il libro vincitore del premio Pulitzer scritto da quel buon amico di Kim che è Douglas R. Hofstadter, con il quale mi alterno quest'anno su questa colonna. A proposito di Kurt Gödel, J. S. Bach e M. C. Escher, in un'altra figura della pagina a fronte si può vedere come Kim abbia dato a ciascun nome un autoscatto simmetria speciale. In una figura a pagina 118 Kim ha disposto i tangram in modo che la configurazione complessiva ha una simmetria bilaterale.

La catalogo mappa di Kim fu notata da Scot Morris, uno dei redattori di «Omnis», che dedicò una pagina della sua popolare rubrica di giochi al lavoro di Kim nel numero di settembre 1979 di «Omnis» e bandì un concorso tra i lettori per la ricerca di configurazioni analoghe. Kim venne assunto per giudicare le molte lettere ricevute. Il concorso si concluse (giugno 1978), la sua soluzione dell'«incasellamento della scatola» (giugno 1979) è la sua mappa splendidamente simmetrica (giugno 1980). Oltre ad avere una notevole simmetria di pensiero geometrico (non solo in due o tre dimensioni, ma anche nello spazio a quattro e in spazi superiori), Kim è un pianista di musica classica che per anni è stato indeciso se proseguire nello studio della matematica o in quello della musica. Al momento si interessa di come servirsi del calcolatore per progettare caratteri di stampa, campo questo in cui fu pioniere il suo amico e mentore Donald E. Knuth.

Per diversi anni il talento di Kim per scoprire e creare giochi da dare per martine simmetrie venne sfruttato solo per divertire gli amici e per elaborare cartoline natalizie per la famiglia. Quando incontrava uno sconosciuto o una sconosciuta ad una festa, impiegava il suo nome, quindi sparava per un attimo e riservava con il nome graziosamente disegnato in modo che si potesse leggere ugualmente sul verso e sul rovescio. Nella figura della pagina a fronte compare il suo biglietto di Natale del 1978 (« Merry Christmas »). Ovviamente, il *Letter* e *Postcards* sono parole c sua madre; Grant e Gail sue fratello e sua sorella.) L'anno successivo trovò il modo per rendere «Merry Christmas 1978» specularmente simmetrico con asse di simmetria orizzontale, mentre nel 1979 lo rese con asse di simmetria verticale. Per l'anniversario di matrimonio dei suoi genitori, Kim dovette sua torta con una glassa di cioccolata e vaniglia che formava la combinazione che si vede nella pagina a fianco. («Letere» è nero, «Pearls » è perle, «Mirrors» è specchi.) Nel numero di Kim «figura a cilindro. Ne troverete un altro esempio in *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, il libro vincitore del premio Pulitzer scritto da quel buon amico di Kim che è Douglas R. Hofstadter, con il quale mi alterno quest'anno su questa colonna. A proposito di Kurt Gödel, J. S. Bach e M. C. Escher, in un'altra figura della pagina a fronte si può vedere come Kim abbia dato a ciascun nome un autoscatto simmetria speciale. In una figura a pagina 118 Kim ha disposto i tangram in modo che la configurazione complessiva ha una simmetria bilaterale.

La catalogo mappa di Kim fu notata da Scot Morris, uno dei redattori di «Omnis», che dedicò una pagina della sua popolare rubrica di giochi al lavoro di Kim nel numero di settembre 1979 di «Omnis» e bandì un concorso tra i lettori per la ricerca di configurazioni analoghe. Kim venne assunto per giudicare le molte lettere ricevute. Il concorso si concluse (giugno 1978), la sua soluzione dell'«incasellamento della scatola» (giugno 1979) è la sua mappa splendidamente simmetrica (giugno 1980). Oltre ad avere una notevole simmetria di pensiero geometrico (non solo in due o tre dimensioni, ma anche nello spazio a quattro e in spazi superiori), Kim è un pianista di musica





*La storia dei cinque tetramini.*

2. Morti: ogni organismo con quattro o più vicini muore (viene rimosso) per sovraoppolazione. Ogni organismo con un solo o nessun vicino muore per isolamento.

3. Nascite: ogni cella vuota con esattamente tre vicini diventa una « cella di nascita ». Vi si dispone dunque una nuova cellula nella stessa successiva.

È importante tener presente che tutte le morti e le nascite hanno luogo simultaneamente; nel loro insieme esse costituiscono una sola generazione o, come la chiameremo, una « mossa » nella « storia » completa della configurazione iniziale. Conway raccomanda di effettuare le mosse del modo seguente:

1. Inconiniamo con una configurazione di fiches nere.

2. Localizzare gli organismi destinati a morire e contrassegnarli sovrapponendo loro un'altra fiche nera.

3. Localizzare le celle disponibili in cui avvertanno le nascite e disporvi una fiche bianca.

4. Dopo aver eseguito due controlli per assicurarsi di non aver fatto errori, rimuovere tutti i morti (mucchietti di 2 fiches) e sostituire tutti gli organismi neonati (bianchi) con fiches nere.

A questo punto si avrà la prima generazione nella storia della nostra popolazione iniziale: lo stesso procedimento va ripetuto per produrre le generazioni seguenti. Dovrebbe essere ovvio il perché dell'uso di fiches di due colori: siccome nascite e morti avvengono simultaneamente, gli organismi bianchi neonati non sono in grado di causare altre morti o nascite, il che è essenziale poterli distinguere dagli organismi della vecchia generazione nel controllare di non aver fatto errori. Il molto facile commettere specialmente al principio, anche se dopo un certo tempo si procede con più disinvoltura; ma anche i giocatori esperti devono controllare accuratamente ogni generazione prima di rimuovere gli organismi morti e di sostituire i neonati bianchi con fiches nere.

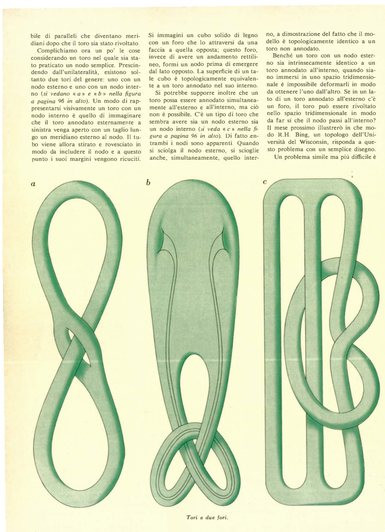
Scoprirete che la popolazione varia continuamente, assumendo configurazioni spesso bellissime e sempre imprevisto: in qualche caso la popolazione si estingue (rimozione di tutte le fiches in campo) anche se dopo un gran numero di generazioni; la maggior parte delle volte si raggiunge però una configurazione stabile che rimane immutata (e che Conway chiama « natura morta ») o configurazioni oscillanti all'infinito. Le configurazioni iniziali asimmetriche tendono a diventare simmetriche; una volta raggiunta la simmetria questa però persiste, magari arricchendosi sempre più.

A questo punto si avrà la prima generazione nella storia della nostra popolazione iniziale: lo stesso procedimento va ripetuto per produrre le generazioni successive. Dovrebbe essere ovvio il perché dell'uso di fiches di due colori: siccome nascite e morti avvengono simultaneamente, gli organismi bianchi neonati non sono in grado di causare altre morti o nascite, il che è essenziale poterli distinguere dagli organismi della vecchia generazione nel controllare di non aver fatto errori. Il molto facile commettere specialmente al principio, anche se dopo un certo tempo si procede con più disinvoltura; ma anche i giocatori esperti devono controllare accuratamente ogni generazione prima di rimuovere gli organismi morti e di sostituire i neonati bianchi con fiches nere.

Scoprirete che la popolazione varia continuamente, assumendo configurazioni spesso bellissime e sempre imprevisto: in qualche caso la popolazione si estingue (rimozione di tutte le fiches in campo) anche se dopo un gran numero di generazioni; la maggior parte delle volte si raggiunge però una configurazione stabile che rimane immutata (e che Conway chiama « natura morta ») o configurazioni oscillanti all'infinito. Le configurazioni iniziali asimmetriche tendono a diventare simmetriche; una volta raggiunta la simmetria questa però persiste, magari arricchendosi sempre più.

A questo punto si avrà la prima generazione nella storia della nostra popolazione iniziale: lo stesso procedimento va ripetuto per produrre le generazioni successive. Dovrebbe essere ovvio il perché dell'uso di fiches di due colori: siccome nascite e morti avvenno



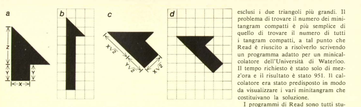


*Tori a due fori.*

*Tori di tessuto riordinabili.*







*Costruzione dei tangrams pentagonali.*

quello che dovrebbe essere l'aspetto dei tangram. La nostra equazione di partenza diventa $2xy+2y=8$; con la solita condizione che *x* sia minore di *y*. L'unica soluzione in numeri interi è la seguente: $x = 2$, $y = 2$; $z = 2$. Ricordando che questi valori vanno moltiplicati per $\sqrt{2}$, otteniamo il tangram mostrato in *A*. Si tratta effettivamente di una figura che può essere ritrovata coi tan: esiste dunque una sola soluzione in corrispondenza della successione 61122.

Una procedura simile viene attuata per tutte e 20 le successioni. « Alcune successioni danno origine a più di una figura, altre a nessuna, mentre altre ancora danno origine a figure che non sono realizzabili per mezzo dei tan. Esaminando i vari casi e scartando quelli che non interessano, si ottengono alla fine 16 tangram compatti di cinque lati.» I tangram in questione sono i primi 16 della figura in alto della pagina a fronte.

Il procedimento non è ancora terminato, perché non tutti i tangram pentagonali sono anche compatti. A questo punto potremmo pensare di trovarci di fronte a una situazione troppo complicata, ma ci accorgiamo subito che fortunatamente non è così. Se un tangram non è compatto, allora deve esserci almeno una linea secondo la quale due lati non combaciano in modo da dare origine a una figura compatta. Da entrambi i lati di questa linea vi deve essere una figura dotata di due lati che non interferiscono con la linea di giunzione in questione, ovvero quattro lati in tutto. Se a entrambi gli estremi di questa linea non si verifica il combaciare perfetto che caratterizza le figure compatte, allora il tangram viene a possedere due lati in più, quindi in totale i suoi lati sarebbero sei e non si tratterebbe più di un tangram pentagonale. Per ottenere un pentagono occorre che si aggiunga un lato da una parte sola della linea di giunzione imperfetta. In altre parole, tutti i tangram non compatti sono costituiti da due triangoli che vengono a combaciare su una linea di giunzione imperfetta, a un estremo della quale la congiunzione dà origine a una figura compatta, mentre all'altro no.

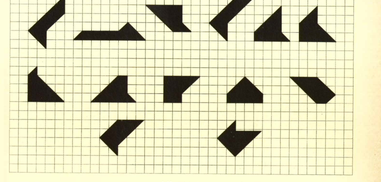
I triangoli tangram possono avere aree 1/2, 1, 2 e 4; quindi, perché l'area totale sia 8, l'unica soluzione è quella di congiungere due triangoli di area 4. Per evitare che il risultato sia compatto, saranno uniti secondo i lati disuguali. Le figure pentagonali ottenibili in questo modo sono solo 2 (*si veda le ultime due figure nell'illustrazione in alto della pagina a fronte*), dando origine in totale a 18 tangram pentagonali.

Ci si potrebbe ora chiedere quanti tangram di sei, sette o più lati esistano, ma (come fa notare Read) la questione è di facile soluzione. Per ogni preso tra 6 e 23, esiste una infinità di poligoni di *n* lati. Basta guardare uno qualsiasi dei due pentagoni non compatti per renderci conto che, facendo scorrere i due triangoli che li costituiscono lungo la loro linea di giunzione, si ottengono un'infinità di esagoni. Quanti sono gli esagoni compatti? Sebbene il loro numero sia finito, per quanto ne so, non è mai stato determinato.

I tangram compatti sono in numero finito, ma si è ben lontani dal conoscerne tale numero (che Read chiama numero compatto). Read ha inventato una procedura ingegnosa seguendo la quale si sarebbe possibile programmare un calcolatore per computare tale numero, ma egli pensa che si tratti di un numero astronomico e quindi un programma del genere non è mai stato eseguito. Sfortunatamente i dettagli della tecnica seguita da Read sono troppo complessi per essere esposti in questa sede, tuttavia con la stessa procedura è stato risolto un problema più semplice. Read definisce minitangram un tangram ottenuto con i cinque pezzi che rimangono una volta tratta solo di una possibile linea di divisione.

Dopo l'esplorazione preliminare, il programma effettua una serie di prove, con un criterio euristico, finché trova un modo di sistemare i tan ottenendo un sottotangram o un potenziale sottotangram. Quando si è ottenuta una certa combinazione di pezzi, si estrae il sottotangram con essa ottenuto e il programma si applica a ciò che resta. Le prove sono graduate in ordine di efficacia, in modo che le più efficaci abbiano luogo per prime e via via le altre in ordine decrescente. Se non si ottiene nessuna soluzione il programma incrocia da capo e passa alla seconda prova. È impossibile descrivere il programma in modo più dettagliato, ma i lettori interessati possono trovare una spiegazione esauriente, con *flow chart* ed esempi, in *A Heuristic Solution to the Tangram Puzzle*, di E. S. Deutsch e Kenneth C. Haves Jr.,

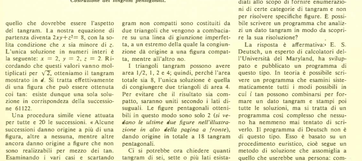
*I 18 pentagoni.*



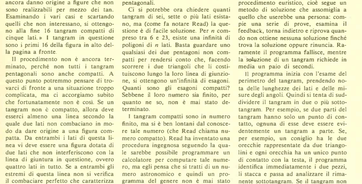
*Tangram con buchi.*







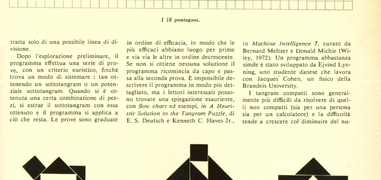
*Inflessione di una struttura.*



*La struttura infinita del sole.*



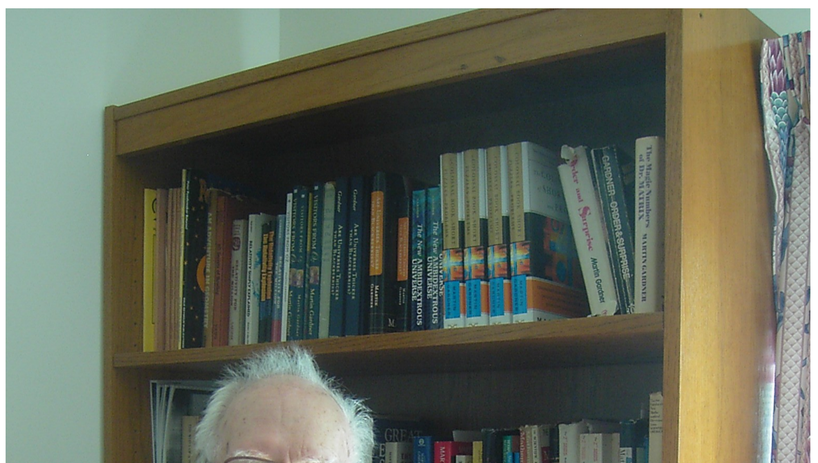
*La struttura infinita della stella.*



*Gli «imperi» del due, del fante e della regina.*







Martin Gardner (1914–2010)

*"Non solo la matematica è reale, ma è l'unica realtà."*

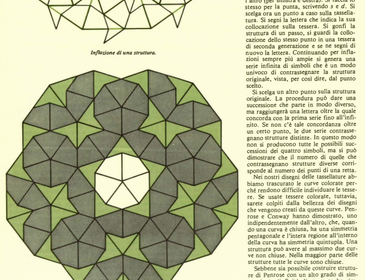


*Alberi per solitario con tre e sei carte*

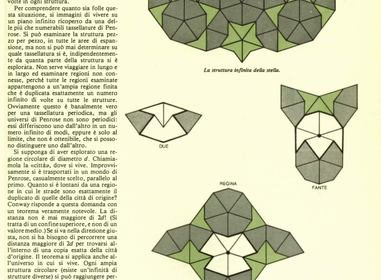
*Albero bulgaro per 10 carte*







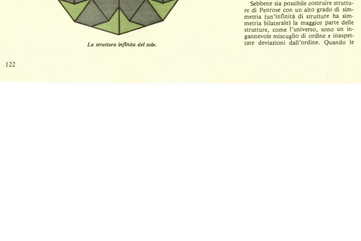
*La mappa con 12 colori di Percy John Heawood.*



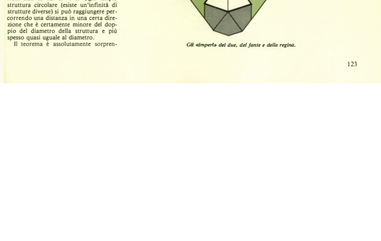
*La variante simmetrica di Scott Kim della mappa di Heawood.*







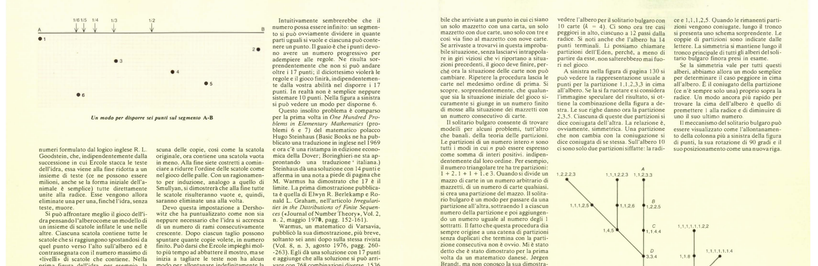
*Rep-tile di basso ordine combaciano formando repliche di se stessi sempre più grandi. Il triangolo rettangolo isoscele (a) è una figura rep-2: due di essi formano un triangolo più grande con la stessa forma. Un triangolo rep-3 (b) ha angoli di 30, 60 e 90 gradi. Altri rep-tile sono, per esempio, un quadrilatero rep-4 (c) e un esagono rep-4 (d). La sfinge (e) è l'unico pentagono rep-4 noto.*



*I pezzi Soma sono forme irregolari che si ottengono usando le facce di cubi unitari (qui sopra). I sette pezzi possono essere disposti in 240 modi diversi per formare il cubo Soma. Per 3 per 3 per 3, ma gli stessi pezzi si possono creare anche tutte le strutture rappresentate qui a destra. Iranne una. Riuscite a determinare quale delle strutture non si può costruire? La risposta è a pagina 99.*



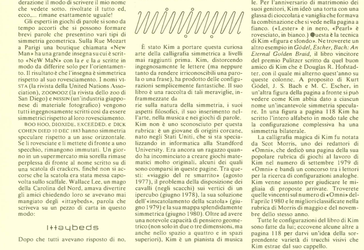




*Albero bulgaro per 12 carte*







*«Merry Christmas» specularmente simmetrico con asse di simmetria orizzontale*

*Gödel, Escher e Bach in simmetria speculare*

*«Letere» e «Pearls» fanno da figura e da fondo*

*Un modo per disporre sei punti sul segmento A-B*

*Grafo del jam (a sinistra) e suo «duale» nel flinto (a destra).*

*Cartina per il gioco del jam.*







*La mappa di Herbert Taylor che dimostra come siano necessari 18 colori quando mi uguale a 3.*